Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 1

Wird am 28. April 2000 besprochen

1. Man zeige, daß durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \sin(u)\cos(v) + z &= 0 \end{aligned}$$

   die Variablen x, y, z lokal um $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^5$ als Funktionen von u und v eindeutig bestimmt sind, und berechne

$$\frac{\partial x}{\partial u}(\frac{\pi}{2}, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial v}(\frac{\pi}{2}, 0)\,.$$

2. (a) Man zeige, daß $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$ eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
   (b) Man gebe eine Karte um $(0, 0, 1)$ von M an.

3. Man zeige, daß eine “Figur Acht” keine 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

4. Man beschreibe durch eine lineare Gleichung den Tangentialraum $T_P(S^2)$ der Einheitssphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ in $P = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 2

Wird am 05. Mai 2000 besprochen

1. Es sei $f(x, y, z) = x + y^2 - z$. Man zeige, daß die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren anwendbar ist um alle kritischen Punkte von f unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $z = x^2 + y^2$ zu finden. Dann benütze man eben diese Methode um alle diese Punkte zu bestimmen, und schließlich berechne man das Maximum und das Minimum von f unter diesen Nebenbedingungen.

2. (a) Man zeige, daß $(0, 1, 1)$ ein Tangentialvektor von $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ bei $(1, 0, 0) \in S^2$ ist.
   (b) Die Gleichung $\phi_1(x, y, z) = (x - \sqrt{1 - y^2 - z^2}, y + z, z)$ bestimmt eine Karte von S^2 in der Nähe von $(1, 0, 0) \in S^2$. Welches 2–Tupel repräsentiert den Tangentialvektor $(0, 1, 1) \in T_{(1,0,0)}S^2$ in den entsprechenden lokalen Koordinaten?
   (c) Die Gleichung $\phi_2(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, y - z, y + z)$ bestimmt ebenfalls eine Karte von S^2 in der Nähe von $(1, 0, 0) \in S^2$. Welches 2–Tupel repräsentiert den Tangentialvektor $(0, 1, 1) \in T_{(1,0,0)}S^2$ in den diesen lokalen Koordinaten?
   (d) Es sei $\psi_i = \phi_i|_{S^2\cap U}, i = 1, 2$, wo U eine passende Umgebung von $(1, 0, 0)$ ist. Man berechne die Jakobimatrix des Koordinatenwechsels von ψ_1 nach ψ_2 am Punkt $\psi_1(1, 0, 0)$ und überprüfe, daß die Koordinaten des Tangentialvektors $(0, 1, 1) \in T_{(1,0,0)}S^2$ sich eben mit dieser Matrix transformieren.

3. (a) Man bestimme alle möglichen σ–Algebren auf der Menge $\{a, b, c\}$.
   (b) Man bestimme alle möglichen Topologien auf der Menge $\{a, b, c\}$.

4. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X in welcher eine *Distanzfunktion* (oder auch *Metrik*) ρ definiert ist, welche die folgenden Eigenschaften hat:
   (a) $0 \leq \rho(x, y) < \infty$ für alle $x, y \in X$.
   (b) $\rho(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.
   (c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
   (d) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x)$ für alle $x, y, z \in X$. (Die Dreiecksungleichung.)
   Ist $x \in X$ und $r \geq 0$, dann heißt die Menge $\{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ die *offene Kugel* mit Zentrum x und Radius r. Es sei τ die Menge aller Teilmengen von X welche beliebige Vereinigungen von offenen Kugeln in X sind. τ ist die sogenannte *Metriktopologie.*
   Sind X und Y zwei beliebige topologische Räume und $f : X \to Y$, so heißt f stetig bei $x_0 \in X$, falls es für jede offene Menge $V \subset Y$ mit $f(x_0) \in V$ eine offene Menge $W \subset X$ mit $x_0 \in W$ gibt, so daß $f(W) \subset V$ gilt. Man zeige: Sind nun X und Y metrische Räume mit der Metriktopologie, so ist diese Definition von Stetigkeit äquivalent zur üblichen ε–δ–Definition.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 3

Wird am 12. Mai 2000 besprochen

1. Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen in $[-\infty, \infty]$. Man beweise:

   (a) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

   (b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$, zumindest wenn keine der auftretenden Summen der Form $\infty - \infty$ ist. Dann gebe man ein Beispiel wo die strikte Ungleichung gilt.

   (c) Gilt $a_n \le b_n$ für alle n, so folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$.

2. Man zeige, daß die Menge aller Punkte wo eine Folge meßbarer reellwertiger Funktionen konvergiert eine meßbare Menge ist.

3. Man zeige, daß wenn für $f : X \to \mathbb{R}$ alle Mengen der Form $\{x \in X : f(x) \ge r\}$ für alle *rationalen* Zahlen r meßbar sind, so ist auch f meßbar.

4. (a) Man zeige, daß jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ eine *abzählbare* Vereinigung von offenen Kugeln ist.

   (b) Man zeige, daß jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ eine *abzählbare* Vereinigung von offenen achsenparallelen n–dimensionalen Quadern ist. (Für $n = 1$ sind diese Quader natürlich offene beschränkte Intervalle, und für $n = 2$ sind es offene achsenparallele Rechtecke.)

   Hinweis: Man überlege sich in (a) daß man wegen der Dichtheit der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen nur rationale Radien und rationale Zentren braucht. Die Menge der rationalen Zahlen ist offensichtlich abzählbar, und bekannterweise gilt das auch für höchstens abzählbare Produkte oder Vereinigungen von abzählbaren Mengen.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 4

Wird am 19. Mai 2000 besprochen

1. Es sei $\mathcal{F} = \{(a, a+1) : a \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Man beweise: $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } A \subset [-n, n] \text{ oder } A^c \subset [-n, n]\}$ ist eine Algebra welche $\mathcal{F}$ enthält.
   (b) Man zeige, $\mathcal{A}$ ist keine σ–Algebra.
   (c) Man bestimme die kleinste σ–Algebra $\mathcal{M}$ welche $\mathcal{A}$ enthält.
   (d) Man bestimme die kleinste σ–Algebra $\mathcal{M}'$ welche $\mathcal{F}$ (und gemäß dem nächsten Teil damit auch $\mathcal{A}'$) enthält.
   (e) Es sei nun $\mathcal{F}$ ein beliebiges System von Teilmengen einer Menge X, es sei $\mathcal{A}'$ die kleinste Algebra welche $\mathcal{F}$ enthält, und es sei $\mathcal{M}'$ die kleinste σ–Algebra welche $\mathcal{F}$ enthält. Man zeige $\mathcal{M}' \supset \mathcal{A}'$.

2. Es sei μ ein positives Maß auf der σ–Algebra $\mathcal{M}$. Man zeige, daß falls $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, falls $A_n \in \mathcal{M}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, und falls schließlich $\mu(A_1) < \infty$, dann gilt $\mu(A_n) \to \mu(A)$ für $n \to \infty$.

3. Es sei $f_n : X \to [0, \infty]$ meßbar für $n \in \mathbb{N}$, $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq 0$, $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und jedes $x \in X$, und es sei $\int_X f_1 \, d\mu < \infty$. Man zeige, daß dann
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,,$$
und man zeige, daß dieser Schluß im Allgemeinen falsch ist wenn man die Voraussetzung $\int_X f_1 \, d\mu < \infty$ wegläßt.

4. Es sei μ das Zählmaß auf der Menge der natürlichen Zahlen, und $a : \mathbb{N} \to [0, \infty)$. Für $a(i)$ schreiben wir wie es üblich ist a_i. Man zeige, daß
$$\int_{\mathbb{N}} a \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \,.$$
Anmerkung: Muß man sich die Meßbarkeit für jedes solche a getrennt überlegen, oder ist das ein für alle Mal zu erledigen?

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 5

Wird am 26. Mai 2000 besprochen

1. Es sei $\{f_n\}$ eine Folge beschränkter komplexwertiger meßbarer Funktionen auf X und es gelte $\mu(X) < \infty$.
   (a) Man zeige: Konvergieren die $f_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in $x \in X$, dann gilt
   $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$
   (b) Man finde ein Beispiel mit $\mu(X) = \infty$ wo der Schluß von Teil (a) nicht gilt. *Hinweis:* Betrachte die konstanten Funktionen.

2. Es sei $p = \{p_n\}$ eine Folge in $[0, \infty]$. Für $E \subset \mathbb{N}$ definieren wir
   $$\mu_p(E) = \sum_{n\in E} p_n \, .$$
   (a) Man zeige, daß μ_p ein Maß auf $\mathbb{N}$ ist, mit Definitionsbereich gleich der Potenzmenge von $\mathbb{N}$. (Manchmal heißt dieses Maß das *Zählmaß mit Gewichten* $\{p_n\}$. Das Standardzählmaß ist in dieser Notation das Zählmaß mit Gewichten $\{1\}$.)
   (b) Nun sei $p = \{2^{-n}\}$ und μ_p das entsprechend gewichtete Zählmaß. Man berechne $\mu_p(\mathbb{N})$.
   (c) Es sei μ_p wie in Teil (b) und μ das Standardzählmaß. Man finde ein $f \in L^1(\mu_p)$ mit $f \notin L^1(\mu)$.

3. Es sei $f \in L^1(\mu)$. Man beweise, daß es dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$ für jede meßbare Menge E mit $\mu(E) < \delta$ gilt.
   Anleitung: Man führe einen indirekten Beweis und finde für ein festes $\varepsilon > 0$ meßbare Mengen E_n mit $\mu(E_n) < 2^{-n}$ aber $\int_{E_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$. Dann setze man $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ und betrachte $\int_{A_n} |f| d\mu$ für $n \to \infty$.

4. Es sei $f : X \to [0, \infty]$ meßbar und E eine beliebige meßbare Menge. Man zeige: Ist $\int_E f \, d\mu = 0$, so ist $f = 0$ f.ü. auf E.
   Anleitung: Man setze $A_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$ und zeige zuerst $\mu(A_n) = 0$. Das gewünschte Resultat folgt mit dem üblichen Vereinigungstrick.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 6

Wird am 2. Juni 2000 besprochen

1. Man zeige: Sind $I, J \subset \mathbb{R}^p$ halboffene Zellen gleichen Typs, so sind $I \cap J$, $I \cup J$ und $I \setminus J$ Vereinigungen von endlich vielen paarweise disjunkten Zellen vom gleichen halboffenen Typ. Das Komplement ist eine abzählbare Vereinigung von halboffenen Zellen gleichen Typs.

2. Man beweise Satz 4.3: *Seien* $A, B \subset \mathbb{R}^p$ *mit* $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0$. *Dann gilt* $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.
   Anleitung: Man überlagere $A \cup B$ mit Zellen I_k mit Durchmesser kleiner als $\operatorname{dist}(A, B)$, so daß $m^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$. (Warum geht das?) Man überlege sich, daß die Zellen I_k nicht sowohl A als auch B schneiden können, und zerlege die Überlagerung von $A \cup B$ in Überlagerungen von A und B. (Bleiben da irgendwelche Zellen übrig, und wenn ja, was macht man mit denen?)

3. Man zeige:

   (a) Das äußere Maß einer einpunktigen Menge ist 0.

   (b) Das äußere Maß einer abzählbaren Menge ist 0.

   (c) Das zwei-dimensionale äußere Maß von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ist 0.

   (d) Das zwei-dimensionale äußere Maß von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ ist 0.

   Ansatz für (d): Für gegebenes $\varepsilon > 0$ überdecke die Linie mit abzählbar vielen Quadraten der Seitenlänge ε/n, $n \in \mathbb{N}$. (Warum geht das? Wie geht das?)

4. Man zeige: Ist $E \subset \mathbb{R}^p$ und $m^*(E) = 0$, so ist $E \in \mathcal{L}$.
   Bemerkung: Dies zeigt also, daß die σ-Algebra $\mathcal{L}$ bezüglich dem darauf definierten Maß $m = m^*|_{\mathcal{L}}$ vollständig ist.

Analysis 4, Übungsblatt 7

Wird am 9. Juni 2000 besprochen

1. *Das Beispiel von Vitali: Existenz einer Menge welche nicht lebesguemeßbar ist.*

   (a) Definiere $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x - y$ eine rationale Zahl ist. Man zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$.

   (b) Es sei V eine Untermenge von $(0, 1)$ welche aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ genau ein Element enthält. Daß es so eine Menge gibt, folgt direkt aus dem Auswahlaxiom. Wir behaupten, daß V nicht lebesguemeßbar ist. Der Beweis geht über mehrere Schritte. Zuerst zeige man:

      i. Ist $x \in (0, 1)$, dann ist $x \in r + V$ für eine rationale Zahl $r \in (-1, 1)$.

      ii. Sind r und s verschiedene rationale Zahlen, so gilt $(r + V) \cap (s + V) = \{\}$.

   (c) Setze $S = \bigcup(r + V)$ wobei die Vereinigung über alle rationale Zahlen $r \in (-1, 1)$ genommen wird. Man zeige: $(0, 1) \subset S \subset (-1, 2)$.

   (d) Wegen der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes gilt $m(r+V) = m(s+V)$. Man benütze dieses und die Tatsache, daß die Menge S als disjunkte Vereinigung gegeben ist, um mittels der Monotonie des Lebesguemaßes m einen Widerspruch zu (c) zu erzeugen.

   Anmerkung ohne Beweis: In der Tat enthält jede Menge $E \subset \mathbb{R}$ mit $m(E) > 0$ eine Teilmenge welche nicht lebesguemeßbar ist.

2. *Die Cantorsche Menge der mittleren Drittel.*

   (a) Es sei $E_0 = [0, 1]$. Induktiv konstruiere man $E_n \subset E_{n-1}$ indem man aus jedem Intervall, welches Bestandteil von E_{n-1} ist, das offene mittlere Drittel löscht. Man bestimme die Anzahl a_n und die Länge l_n der Intervalle in E_n (gemäß Konstruktion sind sie alle gleich lang). Offensichtlich gilt $m(E_n) = a_n l_n$.

   (b) Man setze $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ und zeige, daß E abgeschlossen ist, also kompakt ist, und daß $m(E) = 0$ gilt. Diese Menge E ist die sogenannte Cantorsche Menge der mittleren Drittel.

   (c) Man definiere $g_n = (1/(a_n l_n))\chi_{E_n}$, wo χ_{E_n} die charakteristische Funktion der Menge E_n ist, und setze $f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt$. Man zeige: $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, f_n ist stetig und monoton steigend, und f_n ist auf jedem Intervall im Komplement von E_n konstant. Man mache eine Skizze von $f_n, n = 0, \ldots, 4$.

   (d) Man zeige: Ist I eines der Intervalle von E_n, so gilt

   $$\int_I g_n(t)\,dt = \int_I g_{n+1}(t)\,dt = \frac{1}{a_n}\,;$$

   und es folgt sofort

   $$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_I |g_n(t) - g_{n+1}(t)|\,dt < \frac{2}{a_n}$$

   für $x \in E_n$. Man zeige, daß auch $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ für $x \notin E_n$ folgt.

(e) Man zeige, daß die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine stetige, monoton steigende Funktion f konvergiert. Man zeige, daß f die folgenden Eigenschaften hat: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) = 0$ für alle $x \notin E$.

Schlußfolgerung: Somit ist die Funktion f eine nicht konstante, monoton steigende, stetige und fast überall differenzierbare Funktion, deren Ableitung fast überall Null ist. Insbesondere gilt für diese Funktion

$$f(1) - f(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 0\,dt = \int_0^1 f'(t)\,dt\,.$$

Also ist *"fast überall differenzierbar"* offensichtlich nicht genug, so daß der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt.
Anmerkung: Man kann zeigen, daß jedes $x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k/3^k$, mit b_k entweder 0 oder 2, in allen E_n, also in E enthalten ist (genauer, daß E aus genau diesen x besteht). Da die Menge aller solcher x überabzählbar ist, ist auch E überabzählbar.

Analysis 4, Übungsblatt 8

Wird am 16. Juni 2000 besprochen

1. Man beweise den folgenden Satz: *Sei $1 \leq p < \infty$ und S die Menge aller komplexwertigen einfachen meßbaren Funktionen $s : X \to \mathbb{C}$ mit $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Dann ist S dicht in $L^p(\mu)$. In anderen Worten, zu jedem $f \in L^p(\mu)$ gibt es eine Folge $\{s_n\} \subset S$ mit $\|f - s_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.*
   Hinweis: Man behandle zuerst den Fall $f \geq 0, f \in L^p(\mu)$ und benütze einen Satz aus der Vorlesung über Approximation durch einfache meßbare Funktionen von unten, zusammen mit dem Satz über monotone Konvergenz.

2. Es sei $1 \leq p < p' \leq \infty$. Man zeige:
   (a) Im Allgemeinen sind $L^{p'}(\mu)$ und $L^p(\mu)$ verschiedene Mengen.
   (b) Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt $L^{p'}(\mu) \subset L^p(\mu)$.
   (c) Ist $\mu(X) = \infty$ so gilt im Allgemeinen weder $L^{p'}(\mu) \subset L^p(\mu)$ noch $L^p(\mu) \subset L^{p'}(\mu)$.

3. (a) Man gebe eine Folge $\{f_n\} \subset L^p(\mathbb{R})$ welche fast überall gegen Null konvergiert, aber so daß f_n in der L^p–Norm nicht gegen die Nullfunktion konvergiert.
   (b) Man gebe eine Folge $\{f_n\} \subset L^p(\mathbb{R})$ welche in der L^p–Norm gegen die Nullfunktion konvergiert, aber fast überall nicht gegen Null konvergiert.

   Bemerkung: Diese Aufgabe soll noch einmal klarmachen, daß Konvergenz fast überall und Konvergenz in der L^p–Norm wenig miteinander zu tun haben.

4. Es sei $X = Y = [0, 1]$ und $D = \{(x, y) : x = y\} \subset X \times Y$ die Diagonale des Einheitsquadrates. Es sei μ das Lebesguemaß auf X und λ das Zählmaß auf Y.
   (a) Man zeige, daß für alle $y \in Y$ die Funktion $x \mapsto \chi_D(x, y)$ bezüglich μ eine meßbare Funktion auf X ist, und daß für alle $x \in X$ die Funktion $y \mapsto \chi_D(x, y)$ bezüglich λ eine meßbare Funktion auf Y ist.
   (b) Man zeige durch direktes Nachrechnen, daß gilt:
   $$\int_Y \int_X \chi_D(x, y)\, d\mu(x)\, d\lambda(y) \neq \int_X \int_Y \chi_D(x, y)\, d\lambda(y)\, d\mu(x)\,.$$
   (c) Man zeige, daß D—und somit also auch χ_D—bezüglich des Produktmaßes $\mu \times \lambda$ meßbar ist.

   Hinweis für (c): Man überdecke D durch eine endliche Anzahl von geeigneten Rechtecken, und mache einen Grenzübergang, so daß D als die Schnittmenge von abzählbar vielen produktmeßbaren Mengen dargestellt wird.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Sommersemester 2000

Analysis 4, Übungsblatt 9

Wird am 23. Juni 2000 besprochen

1. Man finde $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \infty$. Hier bezeichnet $dt = dm(t)$ die Integration bezüglich des Lebesguemaßes m, was dasselbe als riemannsche Integration ist, falls der Integrand Riemann-integrierbar ist (streng genommen sollte man dies erst noch beweisen, aber wir glauben das einfach).

2. Für irgendwelche Funktionen f und g definiert auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[-\infty, \infty]$ (oder auch in $\mathbb{C}$) heißt
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$
die Faltung von f und g am Punkte $x \in \mathbb{R}$. Die Frage stellt sich: Für welche f und g ist das überhaupt sinnvoll? Vergleiche auch Aufgabe 1.
Nun sei f Lebesgue-meßbar auf $\mathbb{R}$. Man kann zeigen, daß es eine Borel-meßbare Funktion $\tilde{f}$ gibt, so daß $f = \tilde{f}$ fast überall auf $\mathbb{R}$; ersetzt man also f durch $\tilde{f}$ ändert sich nichts an irgendwelchen Integralen von f. Im Folgenden seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, und mit dem obigen können wir annehmen, daß sowohl f als auch g Borel-meßbar sind.

   (a) Man zeige ganz allgemein, daß falls $\varphi : X \to Y$ meßbar ist (also ist hier X ein meßbarer Raum und Y ein topologischer Raum), dann ist $\varphi^{-1}(A)$ für jede Borel-Menge $A \subset Y$ eine meßbare Menge in X. Für diese Aufgabe verwende man einen Satz aus der Vorlesung vom Anfang des Kapitels 3.

   (b) Sei nun $\varphi : X \to Y$ meßbar und $\psi : Y \to Z$ Borel-meßbar. Man zeige, daß $\psi \circ \varphi : X \to Z$ ebenfalls Borel-meßbar ist. Man wende dies an, um zu zeigen, daß $(x, y) \mapsto f(x-y)$ eine Borel-meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist. Nun schließe man, daß auch F definiert durch $F(x, y) = f(x-y)g(y)$ eine Borel-meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist.

   (c) Mittels der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes zeige man für das F aus dem vorherigen Teil:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|\,dx\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

   (d) Mittels des Satzes von Fubini angewendet auf F schließe man, daß $(f * g)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ existiert, daß $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, und daß gilt
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

   (e) Sei nun $f = \chi_{[-1,0]}$ und $g = \chi_{[0,1]}$. Man berechne $f * g$.

3. Man finde eine stetige positive Funktion f definiert auf $(0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, wessen Lebesgue-Integral endlich ist, aber so daß
$$\int_0^1 f(x, y)\,dy = \infty$$
für mindestens ein $y \in (0,1)$ gilt. (Wer nichts anderes zu tun hat kann sich auch ein Beispiel konstruieren, für welches das für unendlich viele $y \in (0,1)$ gilt.)

Analysis 4, Übungsblatt 10

Wird am 30. Juni 2000 besprochen

1. **Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.** Man zeige, daß $P_2 : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) : x \leq 0\}$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, und man bestimme die Inverse und die Funktionaldeterminante. Somit leite man für $U \subset (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ die folgende Formel her:
$$\iint_{P_2(U)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_U f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta\,.$$

2. Die **Zylinderkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$** sind definiert durch $Z : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$, $(r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Man führe die analogen Überlegungen zur Aufgabe 1 durch, die entsprechende Formel ist
$$\iiint_{Z(U)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz\,.$$

3. Die **Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$** sind definiert durch $P_3 : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Man führe die analogen Überlegungen zur Aufgabe 1 durch, die entsprechende Formel ist
$$\iiint_{P_3(U)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi\,.$$

4. Anwendungen obiger Formeln.

   (a) Es sei D_R die Kreisscheibe vom Radius $R > 0$ mit dem Ursprung als Zentrum. Man berechne
   $$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\,.$$
   Durch einen Grenzübergang $R \to \infty$ zeige man
   $$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

   (b) Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ die "Dose" mit Basisdurchmesser 2 und Höhe 3, D stehe auf der x-y-Ebene zentriert zum Ursprung. Man berechne
   $$\iiint_D z\sin(zx^2 + zy^2)\, dx\, dy\, dz\,.$$

   (c) Es sei $A \subset \mathbb{R}^3$ das Achtel der Einheitskugel (mit dem Ursprung als Zentrum) welches im ersten Oktanten liegt. Man berechne
   $$\iiint_A \cos(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Analysis 4, Übungsblatt 11

Wird am 7. Juli 2000 besprochen

1. Es seien $\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$, $\eta = e^{x_1}\,dx_2 \wedge dx_3$, und $\psi = \sin(x_1 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$.

   (a) Die 1-Form ω ist per Definition eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \geq 2$ und jedes feste $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Man finde $\omega(x)(e_k)$, wobei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

   (b) Man berechne $d\omega$, $d\eta$, $d\psi$, $\eta \wedge \psi$, $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \omega$, und $d(\omega \wedge \eta)$.

   (c) Es sei $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $\lambda(e_1) = (1,2)^T$, $\lambda(e_2) = (1,0)^T$, und $\lambda(e_3) = (1,-1)^T$, wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Man berechne $\lambda^*\omega$, $\lambda^*\psi$, $(\lambda^*\omega) \wedge (\lambda^*\psi)$, und $\lambda^*(\omega \wedge \psi)$.

   (d) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = (e^{x_1}, x_2 - x_3)^T$. Man berechne $f^*\omega$, $f^*\psi$, $(f^*\omega) \wedge (f^*\psi)$, und $f^*(\omega \wedge \psi)$.

   (e) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = (e^{x_1} + e^{x_2}, e^{x_2})^T$. Man setze $\psi = g(x)\,dx_1 \wedge dx_2$, also $g(x) = \sin(x_1 - x_2)$, und berechne $f^*\psi$ mittels der Formel von Satz 8.3, also mittels $f^*\psi = (g \circ f)(f^*dx_1) \wedge (f^*dx_2)$. Dann verifiziere man die Formel

   $$(f^*\psi)(x) = g(f(x))\mathrm{Det}(f'(x))\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

2. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$ eine differenzierbare Kurve, und $\omega(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)\,dx + h(x_1, x_2)\,dx_2$ eine beliebige 1-Form auf $\mathbb{R}^2$. Man berechne $\gamma^*\omega$ und zeige, daß für das Kurvenintegral des Vektorfeldes $F(x) := F(x_1, x_2) := (g(x_1, x_2), h(x_1, x_2))^T$ auf $\mathbb{R}^2$ gilt:

   $$\int_{[a,b]} \gamma^*\omega := \int_a^b (\gamma^*\omega)(t) = \int_a^b F(\omega(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt =: \int_\gamma F(x) \cdot dx\,.$$

3. Es sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus. Als Erinnerung an die Algebra: Ein Punkt $[x] \in \mathbb{T}^n$ ist eine Äquivalenzklasse von $\mathbb{R}^n$ unter der Operation von $\mathbb{Z}^n$, also $[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in \mathbb{Z}^n\}$. Man zeige, daß $\mathbb{T}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist, indem man einen entsprechenden Atlas angibt. *Hinweis:* Man überlege sich das ganze erst einmal für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

4. Es sei $X = \mathbb{R}$ als Menge und $\phi : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. Man zeige, daß $\mathcal{A} = \{(X, \phi)\}$ trivialerweise ein Atlas auf X ist. Dann zeige man, daß die Abbildung $\mathrm{id} : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ nicht C^1-kompatibel mit diesem Atlas ist. Schlußfolgerung: $\mathbb{R}$ läßt also mindestens zwei verschiedene differenzierbare Strukturen zu, nämlich in der Schreibweise "(Menge, Atlas)" die zwei verschiedenen Strukturen $M_1 = (\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)\})$ und $M_2 = (\mathbb{R}, \{(\mathbb{R}, x \mapsto x)\})$. Allerdings sind diese zwei Strukturen diffeomorph: Man zeige, daß $f(x) = x^{1/3}$ einen Diffeomorphismus f von M_2 nach M_1 definiert. *Bemerkung:* Es gibt auch Mannigfaltigkeiten, die zwei nicht-diffeomorphe Strukturen haben.

Analysis 4, Übungsblatt 12

Wird am 14. Juli 2000 besprochen

1. Man leite die Greenschen Formeln her, indem man $F = v\,\mathrm{grad}(u)$ in den Divergenzsatz einsetzt. Man schreibt die Formeln üblicherweise mit dem Laplaceoperator

$$\Delta u = \mathrm{Div}(\mathrm{grad}(u)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\,.$$

Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit $\partial\Omega$ aus der Klasse C^2, u aus der Klasse C^2, v aus der Klasse C^1, und ν die äußere Normale auf $\partial\Omega$. Dann sind die Greenschen Formeln:

$$\int_\Omega ((\Delta u)v + \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\,,$$

$$\int_\Omega ((\Delta u)v - u(\Delta v))\,dx = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\,d\sigma\,.$$

Man erhält die erste aus der zweiten indem man u und v vertauscht, und die Differenz bildet. Für die zweite Greensche Formel braucht man dann natürlich auch v aus der Klasse C^2.

2. Man zeige die folgende physikalische Aussage: Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit mit Divergenz Null, dann ist die Summe von Einfluß in bzw. Ausfluß aus einer offenen beschränkten Menge des $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand zu jedem Zeitpunkt gleich Null. Man schließe, daß inkompressible Flüssigkeiten ein Geschwindigkeitsfeld mit Divergenz Null haben.

3. Man beweise den **Rotationssatz von Stokes:** *Sei S eine 2-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ aus der Klasse C^2, und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe kompakten Träger und sei stetig differenzierbar. Sei N die Einheitsnormale auf S gemäß der gegebenen Orientierung (also $Det(N, \psi_{z_1}, \psi_{z_2}) > 0$ für lokale orientierte Parametrisierungen von S), und sei*

$$rot(F) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)\,.$$

Dann gilt

$$\int_S rot(F) \cdot N\,d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot dx\,,$$

wo ∂S die durch S induzierte Orientierung hat.
Anleitung: Man benütze den allgemeinen Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten für die von $\eta := F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$ auf S induzierte Differentialform. Dazu berechne man zuerst einmal $d\eta$ auf $\mathbb{R}^3$, und benütze dann eine Formel aus dem Beweis des Divergenzsatzes von der Vorlesung, um zu sehen, daß auf S die Gleichung $d\eta = (\mathrm{rot}(F) \cdot N)\omega_N$ gilt. Für das Wegintegral über ∂S gehe man analog zur Aufgabe 2 des Blattes 11 vor.

Bitte wenden.

4. Man zeige die folgende physikalische Aussage: Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit mit Rotation Null, dann benötigt ein Taucher, der sich auf einer geschlossenen Bahn bewegt, langfristig gesehen keine Energie, gewinnt aber auch keine. Genauer: Bewegt sich ein Teilchen auf der T-periodischen Bahn $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, und ist $E(t)$ die Energie, die man benötigt, um das Teilchen zur Position $\gamma(t)$ am Zeitpunkt t zu bringen (man setze willkürlich $E(0)$ auf irgendeinen Wert, z.B. $E(0) = 0$), dann gilt $E(t+T) = E(t)$ für alle t. Man benütze, daß der Energieunterschied eines Teilchens auf der Bahn $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ durch das negative Wegintegral des Geschwindigkeitsfeldes F der Flüssigkeit gegeben ist, also

$$E(b) = E(a) + \int_\eta (-F) \cdot dx\,.$$

Hier kann man sich klarmachen, warum $\operatorname{rot}(F)$ die Rotation von F heißt: Hätte die Flüssigkeit einen Strudel (also $\operatorname{rot}(F) \neq 0$), dann könnte sich der Taucher im Strudel treiben lassen, und es würde eine geschlossene Bahn geben, so daß er beim Durchschwimmen eine negative Energiebilanz hätte, also weniger Energie selbst aufbringen müßte, als er von der Flüssigkeit durch das Treibenlassen erhält.