Prof. Dr. Uwe F. Mayer — Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 1

Fällig am 5. November 1999

1. Bestimmen sie die Laplacesche Gleichung in den parabolischen Zylinderkoordinaten (ξ, η, z) gegeben durch $x = \xi\eta$, $y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$, und $z = z$.

2. Zeigen Sie für die Greensche Funktion $G(x, y)$ eines beschränkten Gebietes Ω die folgenden Aussagen.

   (a) $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

   (b) $G(x, y) < 0$ für alle $x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

   (c) $\int_\Omega G(x, y) f(y) dy \rightarrow 0$ wenn $x \rightarrow \partial\Omega$, vorausgesetzt f ist beschränkt und integrierbar auf Ω. (Für den Beweis dürfen Sie annehmen daß f stetig ist.)

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 2

Wird besprochen am 19. November 1999

1. Zeigen Sie, daß eine Funktion von $C(\Omega)$ genau dann subharmonisch in Ω ist, wenn sie die Mittelwertsungleichung lokal erfüllt: Für jedes $y \in \Omega$ gibt es ein $\delta(y) > 0$ so daß für alle $R \leq \delta(y)$ gilt

$$u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u\, ds\,.$$

   Benützen Sie dazu die folgende **Definition**. $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, falls für jeden Ball $B \subset\subset \Omega$ und jede Funktion h welche harmonisch auf B ist gilt: $u \leq h$ auf ∂B impliziert $u \leq h$ auf B.

2. Zeigen Sie, daß jede subharmonische Funktion das starke Maximumsprinzip erfüllt. Benützen Sie dazu die folgende **Definition**. $u \in C(\Omega)$ heißt subharmonisch, falls es für jedes $x \in \Omega$ ein $\delta(x) > 0$ gibt, so daß für jeden Ball $B := B_R(x) \subset\subset \Omega$ mit $R \leq \delta(x)$ und jede Funktion h welche harmonisch auf B ist gilt: $u \leq h$ auf ∂B impliziert $u \leq h$ auf B.

3. Zeigen Sie, daß die Definitionen in den ersten beiden Aufgaben dieses Übungsblattes äquivalent sind.

4. (a) Beweisen Sie *Liouvilles Theorem:* Jede von oben beschränkte harmonische Funktion welche auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist, ist konstant.
   (b) Zeigen Sie, daß die Aussage von Liouvilles Theorem im Falle $n = 2$ auch für *sub*harmonische Funktionen gilt.
   (c) Zeigen Sie, daß für $n \geq 3$ subharmonische Funktionen welche von oben beschränkt sind nicht konstant sein müssen.

5. Beweisen Sie den Perronschen Satz (Satz 2.12) indem Sie sich auf den Harnackschen Konvergenzsatz (Satz 2.9) anstelle des Satzes über die normalen Familien (Satz 2.11) berufen.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 3

Wird am 26. November 1999 besprochen

1. Zeigen Sie, daß ein Gebiet Ω mit C^2 Rand $\partial\Omega$ einer gleichmäßigen äußeren Kugelbedingung genügt.

2. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \subset C^1$. Beweisen Sie die folgende Interpolationsungleichung: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt
$$\int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 \, dx \, .$$

3. Sei $u(z) = \operatorname{Re}(z/\log z)$ und $\Omega = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | u(z) < 0 \text{ und } x > 0\}$. Zeigen Sie, daß u auf Ω harmonisch ist, daß $\partial\Omega \subset C^1$ in der Nähe des Ursprungs $(x, y) = (0, 0)$, und daß $\frac{\partial u}{\partial \nu}(0, 0) = -u_x(0, 0) = 0$. Dieses Beispiel zeigt, daß man eine stärkere Forderung an den Rand als nur $\partial\Omega \subset C^1$ braucht (wie zum Beispiel die innere Kugelbedingung) um zu schließen, daß die Normalenableitung an einem echten Maximum am Rande positiv ist.

4. (a) Falls L elliptisch ist, und falls $Lu \geq 0$ und $c < 0$ in einem nicht notwendigerweise beschränkten Gebiet Ω gilt, dann kann u kein inneres positives Maximum annehmen. Beachten Sie, daß keinerlei Annahmen an die Koeffizienten b^i gemacht werden. Die entsprechende Aussage gilt für $Lu \leq 0$ und $c < 0$ und inneres negatives Minimum.

   (b) Falls Falls L elliptisch ist und $c < 0$ in einem beschränkten Gebiet Ω gilt, und falls $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Gleichung $Lu = f$ in Ω erfüllt, dann gilt die Abschätzung
$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \sup_\Omega |f/c| \, .$$

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 4

Wird am 3. Dezember 1999 besprochen

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 2.8 Eine integrierbare Funktion u auf einem Gebiet Ω heißt *schwach harmonisch (subharmonisch, superharmonisch)* in Ω falls für alle Funktionen $\phi \geq 0$ in $C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω gilt:

$$\int_\Omega u\Delta\phi = 0 \quad (\geq 0, \leq 0)\,.$$

Zeigen Sie, daß eine $C^0(\Omega)$ schwach (sub–, super–) harmonische Funktion in der Tat (sub–, super–) harmonisch im klassischen Sinne ist.

Anleitung. Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine nicht-negative Höckerfunktion welche außerhalb der Einheitskugel $B_1(0)$ verschwindet und welche $\int \rho(x)dx = 1$ erfüllt (so eine Funktion heißt *glättender Kern*, auf Englisch *mollifier*). Setze $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Für eine integrierbare Funktion u und $\varepsilon > 0$ definiert man die Glättung

$$u_\varepsilon(x) := (u * \rho_\varepsilon)(x) := \varepsilon^{-n}\int_\Omega \rho\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)u(y)\,dy\,,$$

zumindest wenn $\varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Zeigen Sie zuerst, daß wenn u schwach (sub–, super–) harmonisch ist, so ist es auch u_ε. Benützen Sie jetzt (3) $\Rightarrow$ (2) der nächsten Aufgabe für u_ε (der superharmonische Fall und der harmonische Fall gehen natürlich entsprechend). Zeigen Sie dann, daß $u_\varepsilon \to u$ gleichmäßig auf jedem $\Omega' \subset\subset \Omega$ kovergiert, falls $u \in C^0(\Omega)$. Jetzt führen Sie noch einen Grenzübergang durch um zu zeigen, daß u auch (sub–, super–) harmonisch ist, dazu benützen die Mittelwerts(un)gleichung.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 2.9 Zeigen Sie, daß für $C^2(\Omega)$ Funktionen u die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1. $\Delta u \geq 0$ in Ω
2. u ist subharmonisch in Ω im klassischen Sinne (gemäß den Definitionen auf dem Übungsblatt 2)
3. u ist schwach subharmonisch in Ω

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 5

Wird am 10. Dezember 1999 besprochen

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.1a Man zeige: Seien $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $v \in C^\beta(\overline{\Omega})$, dann gilt $uv \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, wo $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, und mit $d = \operatorname{diam}(\Omega)$ hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|uv\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})} &\leq \max(1, d^{\alpha+\beta-2\gamma}) \|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \|v\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \,, \\ \|uv\|'_{C^\gamma(\overline{\Omega})} &\leq \|u\|'_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \|v\|'_{C^\beta(\overline{\Omega})} \,. \end{aligned}$$

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.1b Wenn $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ und $g \in C^\beta(\overline{\Omega})$, dann gilt $f \circ g \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, wo $\gamma = \alpha\beta$.

Gilbarg-Trudinger, Seite 53 Für ein fest gewähltes β, $1 < \beta < 2$, setze $u(x, y) = (\operatorname{sgn} x) y^\beta$ für $y > 0$ und $= 0$ für $y \leq 0$, definiert auf dem Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < \sqrt{|x|}, x^2 + y^2 < 1\} \,.$$

Man zeige, daß $u \in C^1(\overline{\Omega})$, daß aber $u \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ für alle α mit $1 > \alpha > \beta/2$. Dies zeigt insbesondere, daß für dieses Gebiet $C^1(\overline{\Omega}) \not\subset C^\alpha(\overline{\Omega})$ gilt.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.5 Zeigen Sie für die Poissonsche Gleichung die folgende Verallgemeinerung der Mittelwertsungleichungen (2.6) auf Bällen für die Laplacesche Gleichung.
Erfülle $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die (Un-)Gleichung $\Delta u =$ (bzw. $\geq$ bzw. $\leq$) f in Ω. Dann gilt für jeden Ball $B = B_R(y) \subset \Omega$:

$$u(y) = (\text{bzw.} \leq \text{bzw.} \geq) \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B u \, dx - \frac{1}{n\omega_n} \int_B f(x) \Theta(r, R) \, dx \right\} , \quad r = |x - y| \,,$$

wo

$$\Theta(r, R) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}(r^{2-n} - R^{2-n}) - (R^2 - r^2)/2R^n \,, & n > 2 \,, \\ \log(R/r) - \frac{1}{2}(1 - r^2/R^2) \,, & n = 2 \,. \end{cases}$$

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 6

Wird am 17. Dezember 1999 besprochen

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.7 Sei $\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige, daß die Kelvin-Transformation von u, definiert durch

$$v(x) = |x|^{2-n} u(x/|x|^2) \quad \text{für } x/|x|^2 \in \Omega\,,$$

die Gleichung

$$\Delta v(x) = |x|^{-n-2} f(x/|x|^2)$$

erfüllt.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.8a Sei w das Newtonsche Potential von f in $B = B_R(x_0)$ und sei $f \in L^\infty(B)$ (d.h. f ist beschränkt und integrierbar). Dann gilt $Dw \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ für jedes $\alpha \in (0,1)$ und

$$[Dw]_{\alpha;B} \leq C(n,\alpha) R^{1-\alpha} \|f\|_{\infty;B}\,.$$

Die Norm in L^∞ ist die übliche Supremumsnorm.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.9a Sei P ein homogenes harmonisches Polynom zweiten Grades, so daß es ein α mit $|\alpha| = 2$ gibt, so daß $D^\alpha P \neq 0$ (z.B. $P = x_1 x_2$, $D_{12} P = 1$). Sei $\eta \in C_0^\infty(\{x : |x| < 2\})$ mit $\eta = 1$ für $|x| < 1$, setze $t_k = 2^k$, und sei $\{c_k\}$ eine Nullfolge so daß $\sum c_k$ divergent ist. Dann definiere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(t_k x)\,.$$

Man zeige daß f stetig ist, aber daß $\Delta u = f$ keine C^2 Lösung in einer Umgebung des Ursprungs hat.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.10 Erfülle $u \in C_0^2(B)$ die Gleichung $\Delta u = f$ in $B = B_R(x_0)$. Man zeige

(a) $|u|_0 \leq \dfrac{R^2}{2(n-2)} |f|_0$ für $n \geq 3$,

(b) $|D_i u|_0 \leq R|f|_0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Dies zeigt, daß in (4.14) für $n \geq 3$ die genauere Abschätzung $|u|'_{1;B} \leq 3R^2 |f|_{0;B}$ gilt. *Bemerkung:* Das Original dieser Aufgabe in Gilbarg-Trudinger hat in Teil (a) einen Druckfehler.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 7

Wird am 7. Januar 2000 besprochen

Gilbarg-Trudinger, Seite 65 Man zeige die folgende Erweiterung zu Satz 4.11. Sei $u \in C^2(B_2^+) \cap C^0(\bar{B}_2^+)$, $f \in C^\alpha(\bar{B}_2^+)$ mit $\Delta u = f$ in B_2^+ und $u = 0$ auf T. Sei nun zusätzlich angenommen, daß u kompakten Träger in $B_2^+ \cup T$ hat. Man zeige die folgende Darstellungsformel:

$$u(x) = \int_{B_2^+} \Big[\Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)\Big] f(y)\,dy\,.$$

Hier ist x^* die Spiegelung vom Punkt x in T, d.h. wenn $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, so $x^* = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.9b Sei Q ein homogenes harmonisches Polynom dritten Grades, so daß es ein α mit $|\alpha| = 3$ gibt, so daß $D^\alpha Q \neq 0$. Sei $\eta \in C_0^\infty(\{x : |x| < 2\})$ mit $\eta = 1$ für $|x| < 1$, setze $t_k = 2^k$, und sei $\{c_k\}$ eine Nullfolge so daß $\sum c_k = \infty$ ist. Dann definiere

$$u(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k \eta(t_k x) Q(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k (\eta Q)(t_k x)/t_k^3\,.$$

Dann folgt

$$\Delta u(x) = g(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k \Delta(\eta Q)(t_k x)/t_k\,.$$

Man zeige, daß $g \in C^1$ aber daß auf allen Umgebungen des Ursprungs $u \notin C^{2,1}$ ist. Also ist Hilfssatz 4.4 für $\alpha = 1$ nicht gültig.

Gilbarg-Trudinger, Aufgabe 4.2 Im Hilfssatz 4.2 kann die Hölderstetigkeit durch die Dinistetigkeit ersetzt werden. Beachte, Stetigkeit allein genügt nicht, das zeigt das Beispiel in Aufgabe 4.9a vom letzten Übungsblatt.

Eine Funktion f heißt Dinistetig wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(|x-y|) \qquad \text{mit} \int_{0^+} \varphi(r) r^{-1}\,dr < \infty\,.$$

Also, man beweise Hilfssatz 4.2 wenn f Dinistetig auf Ω ist.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer   Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 8

Wird am 21. Januar 2000 besprochen

1. Der Hilbertraum l^2 besteht aus denjenigen Folgen $\{a_j\}$ welche quadratisch summierbar sind, mit dem Innenprodukt $\langle\{a_j\},\{b_j\}\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$. Definiere den Operator T durch $T(\{a_j\}) = \{0, a_1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots\}$.

   (a) Man zeige, daß T kompakt ist, indem man beweist, daß T der Grenzwert von Operatoren mit endlichen Rang ist.

   (b) Man zeige, daß T kompakt ist, indem man beweist, daß T ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Dazu benütze man das Zählmaß μ auf $\mathbb{N}$, das heißt, $\int_{\mathbb{N}} a_j \, d\mu(j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $l^2 = L^2(\mathbb{N},\mu) = \Big\{\{a_j\} : \int_{\mathbb{N}} a_j^2 \, d\mu < \infty\Big\}$. Man finde also einen geeigneten Kern, so daß $T\{a_j\}(i) = \int_{\mathbb{N}} K(i,j) a_j \, d\mu(j)$ mit $K \in L^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mu\times\mu)$.

   (c) Man zeige, daß T keine Eigenwerte hat.

2. Die zusammenhängende Menge $M^n \subset \mathbb{R}^m$ ist eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, falls es lokale Parametrisierungen $\psi_j : \Omega_j \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ in $C^k(\Omega_j, \mathbb{R}^m)$ gibt, so daß $\cup_j \mathrm{Bild}(\psi_j) = M^n$, und, falls $\mathrm{Bild}(\psi_j) \cap \mathrm{Bild}(\psi_k) \neq \{\}$, so daß $\psi_j^{-1} \circ \psi_k$ ein C^k-Diffeomorphismus von seinem Definitionsbereich auf sein Bild ist. Für $\psi := \psi_j$ nennt man die Funktion $\phi := \psi^{-1}$ eine (lokale) Karte auf M^n, die Sammlung aller Karten nennt man einen Atlas. Die $(y_1, \ldots, y_n) = \phi(x)$ heißen lokale Koordinaten auf M^n. Man definiert den Metriktensor (g_{ij}) in lokalen Koordinaten durch

$$g_{ij} = \frac{\partial\psi_k}{\partial y_i}\frac{\partial\psi_k}{\partial y_j} = \langle \frac{\partial\psi}{\partial y_i}, \frac{\partial\psi}{\partial y_j} \rangle \, .$$

   Hier und im weiteren ist die Summationskonvention benutzt, Indizes notieren die Komponenten der entsprechenden Vektoren, und das Innenprodukt ist dasjenige von $\mathbb{R}^m$.

   (a) Sei nun $x = \psi(y) = \Psi(z)$ für ein Punkt $x \in M^n$, d.h. x liegt im Definitionsbereich zweier überlappendender Karten. Sei J die Jakobimatrix von $\Psi^{-1} \circ \psi$, das heißt

$$J_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \, .$$

   Sei (g_{ij}) der Metriktensor in den Koordinaten y und (γ_{ij}) der Metriktensor in den Koordinaten z. Mit der Kettenregel rechne man nach, daß

$$(g_{ij}) = J^t (\gamma_{ij}) J$$

   gilt. Man notiert die inverse Matrix zu (g_{ij}) durch (g^{ij}), und analog für die anderen Matrizen. Die obige Formel gibt dann auch eine Formel für die Inversen, sobald man sich (z.B. mit Hilfe der Kettenregel) davon überzeugt hat, daß

$$J^{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial z_j}$$

gilt. Sei $g := \det(g_{ij})$ und $\gamma := \det(\gamma_{ij})$. Man zeige, daß aus der Formel auch

$$\sqrt{g} = |\det(J)|\sqrt{\gamma}$$

folgt.

(b) Die Volumenform $d\mathrm{Vol}$ auf $M := M^n$ ist lokal durch $\sqrt{g}\,dy$ definiert. Ist w eine integrierbare Funktion definiert auf M, so daß der Träger von w in $\mathrm{Bild}(\psi) \cap \mathrm{Bild}(\Psi)$ liegt, dann zeige man mittels der mehrdimensionalen Substitutionsregel die Formel

$$\int w(y)\sqrt{g(y)}\,dy = \int w(z)\sqrt{\gamma(z)}\,dz\,.$$

Dies zeigt, daß $\int_M w\,d\mathrm{Vol}$ wohldefiniert ist, also von der Wahl der Parametrisierung nicht abhängt. Übrigens, falls der Träger von w nicht in einer Karte liegt, so definiert man das Integral $\int_M w\,d\mathrm{Vol}$, indem man es in Integrale über kleinere Bereich zerlegt, die alle in einer (jeweils anderen) Karte liegen. Das obige Argument zeigt daß dies wohldefiniert ist.

(c) Ist $u \circ \psi$ eine C^2-Funktion für alle Parametrisierungen ψ einer C^2-Mannigfaltigkeit M, so schreibt man $u \in C^2(M)$. Für ein solches u definiert man in lokalen Koordinaten den Laplace-Beltrami-Operator von M durch

$$\Delta_M u = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\,.$$

Man zeige, daß die Definition von $\Delta_M u$ unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist. Dies geht wohl am einfachsten, indem man eine C^1-Funktion w mit Träger in $\mathrm{Bild}(\psi) \cap \mathrm{Bild}(\Psi)$ hernimmt, und

$$\int_M (\Delta_M u) w\,d\mathrm{Vol} := \int \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right) w(y)\sqrt{g}\,dy$$

zuerst einmal mit partieller Integration, dann mit der mehrdimensionalen Kettenregel und Teil (b), und dann nochmals mit partieller Integration auf das entsprechende Integral in z überführt. Das zeigt dann die Behauptung, weil w beliebig war.

3. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder gegeben durch $x_1^2 + x_2^2 = 1$, und seien $u_1(x) = x_1$, $u_2(x) = x_2 e^{x_3}$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Man zeige, daß $\Delta_{\mathbb{R}^3} u_1 \equiv 0$, aber $\Delta_M(u_1\Big|_M) \not\equiv 0$, und $\Delta_{\mathbb{R}^3} u_2 \not\equiv 0$, aber $\Delta_M(u_2\Big|_M) \equiv 0$. Dies zeigt, daß die harmonischen Funktionen auf einer Untermannigfaltigkeit im Allgemeinen nichts mit den harmonischen Funktionen des umgebenden Raumes zu tun haben, sondern eine eigene Klasse von Funktionen bilden.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 9

Wird am 28. Januar 2000 besprochen

1. Man beweise, daß das (starke) Maximumsprinzip auch für harmonische Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit gilt, das heißt für C^2-Funktionen u auf der C^2-Mannigfaltigkeit M mit welche dem Laplace-Beltrami-Operator Δ_M die Gleichung $\Delta_M u = 0$ erfüllen. Für den Beweis folge man den folgenden beiden Schritten.

   (a) Sei $\overline{\Omega} \subset M$ vollständig im Definitionsbereich einer Karte gelegen. Man zeige, daß u zumindest auf Ω dem Maximumsprinzip genügt. Dazu schreibe man Δ_M in lokalen Koordinaten und benütze eine entsprechende Aussage über allgemeine lineare elliptische Operatoren, siehe Gilbarg–Trudinger Kapitel 3.

   (b) Sei nun $\overline{\Omega}$ nicht im Definitionsbereich einer Karte gelegen. Man benütze ein Überlagerungsargument um zu zeigen, daß das Maximumsprinzip auch dann gilt.

2. Man zeige, daß alle harmonischen Funktionen auf einer kompakten Mannigfaltigkeit konstant sein müssen.

3. Sei u eine nichtkonstante Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators mit (reellem) Eigenwert λ auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M, das heißt $\Delta_M u(x) = \lambda u(x)$ für alle $x \in M$. Mit dem Maximumsprinzip zeige man, daß $\lambda < 0$ gilt.

4. Sei $\phi : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol N aus. Das heißt, für einen Punkt $x \in S^2 - \{N\}$ ist $z = \phi(x)$ der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit $\mathbb{R}^2$. Man zeige, daß mit diesen Koordinaten gilt:

$$\Delta_{S^2} u(x) = \frac{(1+|z|^2)^2}{4} \Delta_{\mathbb{R}^2} u(z)\Big|_{z=\phi(x)} .$$

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 10

Wird am 4. Februar 2000 besprochen

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, nicht notwendigerweise zusammenhängendes Gebiet mit Rand S von der Klasse C^2, und sei ν die äußere Einheitsnormale auf S.

1. Sei $C_\nu(\overline{\Omega})$ der Raum der Funktionen $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ für welche der Grenzwert

$$\partial_{\nu^-} u(x) := \lim_{t \to 0^+} \nu(x) \cdot \nabla u(x - t\nu(x))$$

existiert für alle $x \in S$, mit gleichmäßiger Konvergenz auf S. Man zeige, daß man für $u \in C_\nu(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ die Greenschen Formeln anwenden kann. Dazu betrachte man das Gebiet Ω_t mit Rand $S_t := \{x - t\nu(x) : x \in S\}$ und führe einen Grenzübergang durch.

2. Wegen der Kompaktheit und Glattheit von S gibt es ein $\varepsilon_0(S) > 0$ und eine Konstante C_1, so daß man durch Polarkoordinaten auf S für jedes $x \in S$ und jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Abschätzungen

$$(1) \qquad \int_{\{|x-y|<\varepsilon\} \cap S} |x-y|^{-\alpha} \, d\sigma(y) \;\leq\; C_1 \int_0^\varepsilon r^{-\alpha} r^{n-2} \, dr$$

$$(2) \qquad \int_{\{|x-y|<\varepsilon\} \cap S} \Big| \log|x-y| \Big| \, d\sigma(y) \;\leq\; C_1 \int_0^\varepsilon |\log r| r^{n-2} \, dr$$

herleiten kann. Für die Abschätzung (1) ist die Konstante $C_1 = C_1(S, \alpha)$, und für die Abschätzung (2) hat man $C_1 = C_1(S)$.

   (a) Dies einmal angenommen zeige man, daß die Abschätzung (1) mit einer anderen Konstanten $C_2 = C_2(\alpha, S)$ dann für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

   (b) Für die Abschätzung zwei nehme man ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\varepsilon_0 < 1/e$ gilt. Damit leite man für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Abschätzung

$$(3) \qquad \int_{\{|x-y|<\varepsilon\} \cap S} \Big| \log|x-y| \Big| \, d\sigma(y) \leq C_2 \varepsilon^{n-1} \log(\varepsilon^{-1})$$

   her, mit $C_2 = C_2(S)$.

   (c) Welche Abschätzung ähnlich zu (3) kann man aus der Abschätzung (2) herleiten, wenn man die Bedingung $\varepsilon < \varepsilon_0$ wegläßt?

3. Man zeige, daß wenn K ein (stetiger) Kern der Ordnung α_1 ist (mit $0 \leq \alpha_1 < n-1$), dann ist K auch ein (stetiger) Kern der Ordnung α_2 für jedes $\alpha_2 > \alpha_1$ (wo natürlich auch $0 \leq \alpha_2 < n-1$ angenommen wird).

Prof. Dr. Uwe F. Mayer Wintersemester 1999/2000

Partielle Differentialgleichungen, Übungsblatt 11

Wird am 11. Februar 2000 besprochen

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, nicht notwendigerweise zusammenhängendes Gebiet mit Rand S von der Klasse C^2.

1. Man beweise Hilfssatz (3.25) von Follands Buch: *Ist $\phi \in C(S)$ und u das Einzelschichtpotential von ϕ, also*
$$u(x) = \int_S \Gamma(x-y)\phi(y)\, d\sigma_y\,,$$
dann ist u stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$. Der Beweis geht analog zu dem von Hilfssatz (3.21), nur benützt man hier Polarkoordinaten auf S um die Integrale über den kleinen Ball um x auf S abzuschätzen.

2. Sei K ein reellwertiger singulärer Kern der Ordnung $\alpha \in [0, n-1)$ auf $S \times S$ und T_K der zugehörige Operator auf $L^2(S)$. Man zeige, daß wenn man $K^*(x,y) = K(y,x)$ definiert, so ist T_{K^*} die Adjunkte von T_K, es gilt also $T_K^* = T_{K^*}$

3. Man beweise *Poincarés Ungleichung: Es gibt eine Konstante C so daß für all $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$*
$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$
gilt. Zum Beweis setze man u durch 0 außerhalb von Ω fort, und überlege sich, daß dann für alle ω mit $|\omega| = 1$
$$u(x) = -\int_0^\infty \partial_r u(x + r\omega)\, dr$$
gilt. Durch Integration über alle $\omega \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ leite man dann die Abschätzung
$$|u(x)| \le \frac{1}{n\omega_n} \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy$$
her. Nun benütze man die verallgemeinerte Youngsche Ungleichung (0.10) von Folland. Was ergibt sich für die Konstante?

4. *Das Minimumsprinzip für den ersten Eigenwert.* Angenommen es gibt ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ welches die Null-Dirichlet-Randbedingungen erfüllt (d.h. $u = 0$ auf $\partial\Omega$) und mit
$$\frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx}{\int_\Omega |u(x)|^2\, dx} = m = \min\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla w(x)|^2\, dx}{\int_\Omega |w(x)|^2\, dx} : w \in C^2(\Omega), w = 0 \text{ auf } \partial\Omega, w \not\equiv 0\right\}.$$
(So ein u gibt es immer, wenn wir Ω aus der Klasse C^2 und zusammenhängend annehmen.) Man zeige, daß dann m der kleinste Eigenwert von $-\Delta$ mit Null-Dirichlet-Randbedingungen ist. Dazu nehme man $v \in C_0^2(\Omega)$ und man zeige daß dann
$$f(\varepsilon) = \frac{\int_\Omega |\nabla(u(x) + \varepsilon v(x))|^2\, dx}{\int_\Omega |u(x) + \varepsilon v(x)|^2\, dx}$$

ein Minimum für $\varepsilon = 0$ hat. Aus der Gleichung $f'(0) = 0$ leite man dann

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = m \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$$

her. Mittels der ersten Greenschen Formel zeige man, daß dies dann $\Delta u(x) + mu(x) = 0$ erzwingt, also m in der Tat ein Eigenwert von $-\Delta$ ist. Nun zeige man noch, daß m der kleinste Eigenwert ist. Übrigens, was hat die Konstante in Poincarés Ungleichung mit m zu tun?