Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 1

Wird am 5. Mai 2000 besprochen

1. Ist M ein abgeschlossener Vektorunterraum eines Hilbertraumes H, dann zeige man daß $M = (M^{\perp})^{\perp}$ gilt. Ist die entsprechende Aussage auch wahr, wenn man nicht weiß, daß M abgeschlossen ist? Man gebe einen Beweis, oder ein Gegenbeispiel.

2. (a) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ sei $\{v_n\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren in H. Man entwickle einen konstruktiven Prozeß welcher ein ONS $\{u_n\}$ liefert, so daß u_n eine Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$ ist.

   (b) Man benütze Teil (a) dieser Aufgabe um zu zeigen, daß ein separabler Hilbertraum ein maximales ONS besitzt. Zur Erinnerung, ein (topologischer) Raum heißt *separabel*, wenn er eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Beachte: Im Gegensatz zum allgemeinen Fall in der Vorlesung braucht man also hier das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip nicht.

3. Man berechne
$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$
und finde
$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) \, dx$$
wo g den folgenden Einschränkungen unterliegt:
$$\int_{-1}^{1} g(x) \, dx = \int_{-1}^{1} x g(x) \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x) \, dx = 0\,; \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 \, dx = 1\,.$$

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 2

Wird am 12. Mai 2000 besprochen

1. Man zeige, ist $A \subset [-\pi, \pi]$ meßbar, dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx\, dx = 0\,.$$

2. Sei $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, und sei E die Menge aller $x \in [-\pi, \pi]$ für welche $\sin n_k x$ konvergiert (wenn $k \to \infty$). Man zeige, daß E Lebesgue-Maß 0 hat. Hinweis: Man benütze die Formel $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ und Aufgabe 1 um erst zu zeigen, daß $\sin n_k x \to \pm 1/\sqrt{2}$ fast überall auf E gilt.

3. Angenommen die trigonometrischen Reihe
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos nx + B_n \sin nx \Big)$$
konvergiere im quadratischen Mittel (d.h. im L^2–Sinne). Man berechne ihre Fourierreihe. Achtung: Warum kann man Summierung und Integration vertauschen, oder kann man das überhaupt?

4. (a) Man berechne die Fourierreihe der Funktion $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$.
   (b) Man zeige, daß die Fourierreihe aus Teil (a) gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g auf $[-\pi, \pi]$ konvergiert.
   (c) Man zeige, daß die beiden Funktionen f und g aus Teilen (a) und (b) identisch sind.
   (d) Man berechne den exakten Wert der Reihen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 3

Wird am 19. Mai 2000 besprochen

In diesem Übungsblatt dreht sich alles um das "singuläre" Dirichletsche Integral. Sei s_n die n-te Teilsumme der Fourierreihe der Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$, dann hatten wir für jedes $x \in [-\pi,\pi]$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \Big(s_n(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+2t)\frac{\sin{(2n+1)t}}{\sin t}\,dt \Big) = 0 \tag{1}$$

bewiesen. Dazu (und im Folgenden) wurde f natürlich 2π-periodisch fortgesetzt. Beachte, f ist als Element des Raumes $L^2([-\pi,\pi])$ sowieso nur fast überall definiert, das Symbol f steht also für eine *Klasse* von Funktionen. Deshalb kann man f falls nötig ohne Probleme an einem Punkt ändern um die Periodizität zu erreichen. Wenn im Folgenden von *punktweisen* Eigenschaften einer Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ die Rede ist, dann soll eben die relevante Eigenschaft für einen geeigneten Vertreter der Klasse f gelten.

1. Man berechne die Fourierreihe einer konstanten Funktion. Damit und mit (1) zeige man die Gleichung
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin{(2n+1)t}}{\sin t}\,dt = 1\,.$$
Nun zeige man den folgenden Satz: *Ist $f \in L^2([-\pi,\pi])$ auf dem Intervall (a,b) konstant gleich y_0, dann konvergiert die Fourierreihe von f für alle $x \in (a,b)$ punktweise gegen y_0.* Bemerkung: Man hat hier die Konvergenz wirklich für alle $x \in (a,b)$, und nicht nur für fast alle.

2. Man zeige den folgenden Satz: *Es sei $f \in L^2([-\pi,\pi])$ lokal eine ungerade Funktion bezüglich des Punktes $x_0 \in [-\pi,\pi]$, d.h. es gebe ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x_0-t) = -f(x_0+t)$ für $t \in (0,\varepsilon)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f am Punkt x_0 gegen 0.*

3. Mittels den vorherigen Aufgaben zeige man den folgenden Satz: *Ist $f \in L^2([-\pi,\pi])$ auf dem Intervall (a,b) konstant gleich y_1 und auf dem anschließenden Intervall (b,c) konstant gleich y_2, dann konvergiert die Fourierreihe von f am Anschlußpunkt $x=b$ gegen $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.*

4. Nun sei $f(x) = 1$ für $x \in (0,\pi)$, und $f(x) = 0$ sonst. Man berechne die Fourierreihe von f, und mittels des Satzes in Aufgabe 1 für ein geeignetes $x \in (0,\pi)$ zeige man, daß
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$
gilt. Dann verifiziere man durch direktes Einsetzen in die Fourierreihe den Satz in Aufgabe 3, d.h. man überprüfe, daß die Fourierreihe an den Sprungstellen von f (also hier für $x=0$ und $x=\pi$) gegen den Durchschnitt der Werte direkt links bzw. rechts der Sprungstelle konvergiert.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 4

Wird am 26. Mai 2000 besprochen

1. Man zeige
$$\int_A^B \frac{\sin t}{t}\,dt \to 0 \qquad \text{für } A, B \to \infty\,.$$

2. Wir definieren ein anderes Skalarprodukt auf $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ durch
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

   (a) Man zeige, daß $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ein ONS ist. In diesem Zusammenhange ist $i \in \mathbb{C}$ natürlich die imaginäre Einheit.

   (b) Mittels der eulerschen Formel $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, zeige man, daß dieses ONS vollständig ist.

   (c) Die komplexen Fourierkoeffizienten definiert man in Sinne der allgemeinen Theorie als
$$c_k = \hat{f}(k) = \langle f, e^{ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\,.$$
   Man zeige die Gleichung
$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$
   für die bereits definierten reellen Fourierkoeffizienten $a_0, b_1, a_1, \ldots, b_n, a_n$, und man bestimme die Übergangsgleichungen von den komplexen Fourierkoeffizienten zu den reellen Fourierkoeffizienten, und umgekehrt. Damit konvergiert also die komplexe Fourierreihe einer Funktion genau dann wenn ihre reelle Fourierreihe konvergiert.

3. Angenommen f sei so, daß die Fourierreihe von f bei $x = 0$ gegen $f(0)$ konvergiert. Man zeige:
$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\,.$$

4. Nun sei $f(x) = 1$ für $x \in (0,\pi)$, und $f(x) = 0$ sonst. Man berechne die komplexe Fourierreihe von f, und vergleiche mit dem Resultat der letzten Aufgabe des vorherigen Übungsblattes.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 5

Wird am 09. Juni 2000 besprochen

1. (a) Es sei F eine meßbare Funktion definiert auf ganz $\mathbb{R}$. Man bestimme eine brauchbare Bedingung an F, so daß die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(x + 2k\pi)$$

als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Summe wohldefiniert ist. Damit zeige man für die Fourierkoeffizienten die Formel

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iny}\, dy\,.$$

(b) Man gebe eine brauchbare Bedingung an F, so daß die Fourierreihe von f bei $x = 0$ gegen $f(0)$ konvergiert. Mittels $f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$ leite man die *Poissonsche Summationsformel* her:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iny}\, dy\,.$$

(c) Schließlich wende man das alles für $F(y) = e^{-a^2y^2}$ an ($a \neq 0$ sei eine reelle Konstante), und leite so eine berühmte Transformationsformel der sogenannten Thetafunktionen her,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 s} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2/s}\,,$$

gültig für (reelle) $s > 0$.

2. Man zeige, daß ein unendlich-dimensionaler Banachraum keine abzählbare Vektorraumbasis haben kann.
Hinweis: Man zeige zuerst, daß die lineare Hülle von endlich vielen Vektoren nirgends dicht ist.
Bemerkung: Also gilt insbesondere für $H = L^2([-\pi, \pi])$, daß H zwar eine abzählbare *Hilbertraumbasis* hat (z.B. das ONS der trigonometrischen Funktionen), aber trotzdem keine abzählbare *Vektorraumbasis* besitzt.

3. Man zeige:

   (a) Die Menge c_0 aller Nullfolgen, mit der Supremumsnorm versehen, ist ein Banachraum.

   (b) Konvergiert $\sum_i a_i \xi_i$ für jedes $\xi \in c_0$, so gilt $\sum_i |a_i| < \infty$.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 6

Wird am 16. Juni 2000 besprochen

1. Beweisen Sie:
   (a) Jede abgeschlossene Untergruppe $U \subsetneqq T\,(= S^1)$ ist von der Form
   $$T_N \;=\; \Big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, z^N = 1 \Big\}.$$
   Hinweis: Betrachten Sie $t_0 = \inf\{t > 0\,;\, e^{it} \in U\}$. Welche Folgerungen lassen sich aus $t_0 = 0$ bzw. $t_0 > 0$ ziehen?
   (b) Jede abgeschlossene Untergruppe $U \subsetneqq \mathbb{R}$ ist von der Form $a\mathbb{Z} \;=\; \{an\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) Ist die folgende Aussage auch für die lokalkompakten aber nicht kompakten metrischen Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ richtig?
   Es sei G eine kompakte metrische Gruppe. Ist dann $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, so gilt für jedes $z \in G$ schon $|\varphi(z)| = 1$.
   (b) Beweisen Sie:
   $\varphi : \mathbb{Z} \to T$ ist Gruppenhomomorphismus
   $\iff$ es gibt ein $z \in T$ mit $\varphi(n) = z^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
   $\varphi : \mathbb{R} \to T$ ist *stetiger* Gruppenhomomorphismus
   $\iff$ es gibt ein $y \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = e^{iyt}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Es sei $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie, dass durch $f \mapsto \mathrm{Op}(a)f$ mit
   $$(\mathrm{Op}(a)f)(z) \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\widehat{f}(n)z^n$$
   ein beschränkter linearer Operator $L^2(T) \to L^2(T)$ definiert ist. Bestimmen Sie die Norm von $\mathrm{Op}(a)$. Bestimmen Sie eine Folge a so, dass $\mathrm{Op}(a)$ der identische Operator auf $L^2(T)$ ist.
   (b) **(*)** Geben Sie einen „Lösungsoperator" $u = \mathrm{Op}(a)f$ für das Problem $u' = f$ an.
   u' ist hierbei die Ableitung $u'(z) = \frac{d}{dt}f(ze^{it})|_{t=0}$. (Genauer: Die „Ableitung nach der Kurvenlänge").

4. Zeigen Sie, dass durch
   $$Af(x) \;:=\; \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0, 2\pi]$$
   eine wohldefinierte beschränkte lineare Abbildung $L^1([0, 2\pi)) \;\to\; \Big(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty\Big)$ gegeben ist.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 7

Wird am 23. Juni 2000 besprochen

Für dieses Übungsblatt benützen wir die Notation

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

für die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Man zeige durch direktes Nachrechnen die folgenden Zusammenhänge.
   Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, *und* $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) *Ist* $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, *dann gilt* $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$.
   (b) *Ist* $g(x) = f(x-\alpha)$, *dann gilt* $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.
   (c) *Ist* $g(x) = \overline{f(-x)}$, *dann gilt* $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$.
   (d) *Ist* $g(x) = f(x/\lambda)$ *mit* $\lambda > 0$, *dann gilt* $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$.

2. (a) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Man zeige, daß $\hat{f}(t)\frac{e^{i\alpha t}-1}{\alpha}$ die Fouriertransformierte von $\frac{f(t+\alpha)-f(t)}{\alpha}$ ist. Danach führe man formal (also ohne Konvergenzbeweis) einen Grenzübergang durch, um zu zeigen, daß man erwarten könnte, daß $it\hat{f}(t)$ die Fouriertransformierte von f' ist.
   (b) Man finde ein Beispiel einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ welche fast überall differenzierbar ist, und für welche $f' \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, so daß die Fouriertransformierte von f' **nicht** gleich $it\hat{f}(t)$ ist. *Hinweis:* Man benütze die Cantorfunktion.
   (c) Man zeige, daß falls $f \in L^1(\mathbb{R})$ fast überall differenzierbar ist, falls $f' \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, und falls f das unbestimmte Integral von f' ist, dann gilt in der Tat $\widehat{f'}(t) = it\hat{f}(t)$.

3. Man berechne die Fouriertransformierte $\hat{f}$ der Funktion f gegeben durch $f(x) = e^{-x}$ für $x > 0$, und $f(x) = 0$ sonst, und zeige, daß $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

4. Man zeige, daß für $f \in L^1(\mathbb{R})$ die Fouriertransformierte $\hat{f}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

5. Formulieren Sie den in der Vorlesung beispielhaft dargestellten FFT-Algorithmus und beweisen Sie dessen Korrektheit.

Prof. Dr. Uwe F. Mayer
Dr. Sebastian Sohr

Sommersemester 2000

Fourieranalysis, Übungsblatt 8

Wird am 30. Juni 2000 besprochen

Für dieses Übungsblatt benützen wir die Notation

$$(*) \qquad \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

für die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$. Für signierte endliche Maße μ auf $\mathbb{R}$ definiert man die Fouriertransformierte analog zu (*) durch

$$(**) \qquad \hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, d\mu(x)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Dies ist kompatibel für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ im folgenden Sinne: Jedes solche f definiert ein Maß μ_f durch $\mu_f(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_E f(x)\, dx$, und es gilt $\widehat{\mu_f} = \hat{f}$. Die Funktion f heißt die *Dichte* von μ_f bezüglich des skalierten Lebesguemaßes $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$. Übrigens, der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist reine Kosmetik damit die Inversionsformel der Fouriertransformierten besonders schön aussieht.

1. Man zeige, daß für $f(x) = e^{-x^2/2}$ gilt: $\hat{f} = f$. *Anleitung:*
   (a) Man begründe, daß man $\hat{f}(t)$ unter dem Integralzeichen nach t differenzieren darf, und somit $\hat{f}'(t) = -i\,\widehat{f'}\,(t)$ folgt.
   (b) Durch partielle Integration zeige man, daß $t\hat{f}(t) = i\,\widehat{f'}\,(t)$ gilt.
   (c) Man berechne $\hat{f}(0)$. *Hinweis:* Berechne $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ mittels Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.
   (d) Man zeige, daß sowohl f als auch $\hat{f}$ die Differentialgleichung $y'(t) + ty(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$ mit derselben Anfangsbedingung bei $t = 0$ erfüllen. Man schließe mittels eines geeigneten Satzes aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen, daß $\hat{f} = f$ gilt.

2. Mittels dem Resultat von Aufgabe 1 und der Eigenschaften der Fouriertransformation berechne man die Fouriertransformierte der Normalverteilung mit dem Mittelwert α und der Varianz $\sigma > 0$ gegeben durch
$$\mu = \nu_{\alpha,\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \lambda\,,$$
   mit λ dem Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

3. Direkt mit (**) berechne man die Fouriertransformierte des Diracmaßes ϵ_α am Punkte α, d.h. für $\epsilon_\alpha(E) = 1$ für $\alpha \in E$, und 0 sonst. Insbesondere zeige man $\widehat{\epsilon_0}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und man schließe, daß die Schlußfolgerung des Lemmas von Riemann–Lebesgue für die Fouriertransformierten von Maßen *nicht* gilt.

Bemerkung: Setzt man in der Fouriertransformierten der Normalverteilung ν_{α,σ^2} mit dem Mittelwert α und der Varianz $\sigma > 0$ formal den Wert $\sigma = 0$, so erhält man die Fouriertransformierte des zu α gehörenden Diracmaßes ϵ_α. Deshalb nennt man ϵ_α auch die *ausgeartete Normalverteilung* mit Mittelwert α und Varianz $\sigma = 0$. Daß dies auch graphisch Sinn macht sieht man, wenn die Dichten der Normalverteilungen bezüglich dem Lebesguemaß für kleiner werdende Werte von σ skizziert.