

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Grundlagen und Definitionen</b>	<b>5</b>
2.1 Differentialgeometrie . . . . .	5
2.1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten . . . . .	5
2.1.2 Glatte Mannigfaltigkeiten . . . . .	6
2.1.3 Vektorbündel . . . . .	7
2.1.4 Lokale und globale Schnitte von Vektorbündeln . . . . .	8
2.1.5 Lokale und globale Rahmen . . . . .	8
2.1.6 Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	9
2.1.7 Linearer Zusammenhang . . . . .	10
2.1.8 Kovariante Ableitung . . . . .	11
2.1.9 Geodätische . . . . .	12
2.1.10 Der Riemannsche Zusammenhang . . . . .	13
2.1.11 Exponential-Abbildung . . . . .	14
2.1.12 Riemannsche Untermannigfaltigkeiten und zweite Fundamentalform . . . . .	18
2.1.13 Die mittlere Krümmung von Hyperflächen . . . . .	19
2.2 Topologische Hilfsmittel . . . . .	21
2.2.1 Initialtopologie . . . . .	21
2.2.2 Lebesguescher Überdeckungssatz . . . . .	22
2.2.3 Stetige Einbettungen . . . . .	23
<b>3 Kleine Hölderräume</b>	<b>24</b>
3.1 Hölder-Stetigkeit . . . . .	24
3.2 Kleine Hölderräume - Lokale Theorie . . . . .	34
3.3 Kleine Hölderräume - Globale Theorie . . . . .	41

<b>4 Mittlerer Krümmungsfluss</b>	<b>53</b>
4.1 Der Fluss auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	53
4.2 Der Fluss in der Nähe von Sphären . . . . .	59
<b>A Eine numerische Simulation</b>	<b>67</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>73</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit dem gemittelten mittleren Krümmungsfluss beschäftigen. Dies bedeutet, wir geben uns eine kompakte, zusammenhängende, eingebettete Hyperfläche  $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^m$  mit bestimmter Regularität vor und suchen eine Familie  $M = \{M_t; t \geq 0\}$  von Hyperflächen des  $\mathbb{R}^m$ , die glatt sind für  $t > 0$  und die folgende Evolutionsgleichung erfüllen:

$$V = \bar{H} - H, \quad M_0 = \mathcal{G}, \quad (1.1)$$

hierbei steht  $V(t)$  für die Normalgeschwindigkeit von  $M$  zur Zeit  $t$  und  $H(t)$  steht für die mittlere Krümmung von  $M_t$ . Schließlich bezeichnet  $\bar{H}(t)$  die gemittelte mittlere Krümmung von  $M_t$ , d.h.,

$$\bar{H}(t) := \bar{H}_{M_t} := \frac{\int_{M_t} H(t) do(t)}{\int_{M_t} do(t)},$$

wobei  $o(t)$  das Volumenmaß auf  $M_t$  bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\int_{M_t} (\bar{H}(t) - H(t)) do(t) = 0. \quad (1.2)$$

Wenn  $M_t$  für alle  $t \geq 0$  ein wohldefiniertes, messbares Gebiet  $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^m$  umschließt, kann man zeigen, dass (1.2) äquivalent ist zu der Aussage, dass der mittlere Krümmungsfluß das Volumen  $\text{vol}(\Omega(t))$  des umschlossenen Gebietes zeitlich konstant läßt. Deshalb heißt (1.1) auch volumenerhaltender mittlerer Krümmungsfluß. Es wurde von G. Huisken [9] (und M. Gage [7] im Fall ebener Kurven) gezeigt, dass die Evolutionsgleichung (1.1) für glatte und gleichmäßig konvexe Anfangsflächen eine globale Lösung hat, die exponentiell gegen eine Sphäre konvergiert. Ausgehend von einem Resultat von J. Escher und G. Simonett [6] wollen wir zeigen, dass die Konvexität der

Anfangsfläche nicht notwendig ist für die globale Existenz einer Lösung des volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss. Dies wird das Hauptresultat der Arbeit sein.

Auf dem Weg dorthin wollen wir im allgemeinen Riemannschen Rahmen die Gleichung des volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss analysieren. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

In Kapitel 2 wollen wir Grundlagen und Definitionen (hauptsächlich aus dem Gebiet der Differentialgeometrie) bereitstellen. In [6] wird gezeigt, dass (1.1) unter bestimmten Bedingungen äquivalent ist zu einer abstrakten quasilinearen parabolischen Evolutionsgleichung. Hierbei spielen die kleinen Hölder-räume, mit denen wir uns in Kapitel 3 beschäftigen, eine wichtige Rolle. In Kapitel 4 leiten wir zunächst die abstrakte Evolutionsgleichung im Riemannschen Fall her. Anschließend wollen wir das oben erwähnte Hauptresultat beweisen. Im Anhang sind Resultate einer von Prof. Dr. U. F. Mayer durchgeführten numerischen Simulation des gemittelten mittleren Krümmungsfluss enthalten. Dort ist in beeindruckender Weise zu sehen, wie eine nicht-konvexe Anfangskurve unter der Evolutionsgleichung (1.1) gegen einen Kreis strebt.

Schließlich möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. J. Escher und Herrn Prof. Dr. J. Heine für die freundliche Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit herzlich danken. Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. J. Escher für die hervorragende Betreuung beim Anfertigen meiner Diplomarbeit. Außerdem gilt mein Dank auch Herrn Prof. Dr. U. F. Mayer für das Durchführen der numerischen Berechnungen und das zur Verfügung stellen der Grafiken.

# Kapitel 2

## Grundlagen und Definitionen

### 2.1 Differentialgeometrie

#### 2.1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Ein topologischer Raum  $(M, \tau)$  heißt  $m$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit :  $\Leftrightarrow$

- $(M, \tau)$  ist ein Hausdorff-Raum.
- $(M, \tau)$  ist ein  $A_2$ -Raum.
- $(M, \tau)$  ist lokal euklidisch. D.h. jeder Punkt von  $M$  hat eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  ist.

Anmerkung: Man braucht einen tiefgehenden Satz von Brouwer, um zu zeigen, dass die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt ist. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir  $M$  statt  $(M, \tau)$ . Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Eine Karte von  $M$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U$  eine offene Teilmenge von  $M$  und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Für  $p \in U \subseteq M$  nennen wir  $(U, \varphi)$  Karte von  $M$  um  $p$ . Man nennt zwei Karten  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$   $C^k$ -kompatibel für  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , wenn entweder  $U \cap V = \emptyset$  oder  $\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Diff}^k(\psi[U \cap V], \varphi[U \cap V])$  gilt. Ein  $C^k$ -Atlas von  $M$  ist eine Familie  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$  von Karten mit:

- $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  ist  $C^k$ -kompatibel mit  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  für  $(\alpha, \beta) \in A \times A$ .
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

Man nennt einen  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$  maximal, wenn jede Karte  $(V, \psi)$ , die mit jedem  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  kompatibel ist, selbst zu  $\mathcal{A}$  gehört. Als  $C^k$ -Struktur auf  $M$  bezeichnen wir einen maximalen  $C^k$ -Atlas. Eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M, \mathcal{A})$  bestehend aus einer  $m$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  und einer  $C^k$ -Struktur  $\mathcal{A}$ .

### 2.1.2 Glatte Mannigfaltigkeiten

Im folgenden betrachten wir glatte Mannigfaltigkeiten, d.h.  $m$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten mit einer  $C^\infty$ -Struktur  $\mathcal{A}$ . Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, schreiben wir wieder  $M$  statt  $(M, \mathcal{A})$ .

**Lemma 2.1** *Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

- (a) *Jeder glatte Atlas von  $M$  ist in einem eindeutigen, maximalen, glatten Atlas enthalten.*
- (b) *Zwei glatte Atlanten von  $M$  bestimmen denselben maximalen, glatten Atlas genau dann, wenn deren Vereinigung wieder ein glatter Atlas ist.*

**Beweis:** Siehe [11], Lemma 1.10. □

Sei  $M$  eine glatte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(E, |||)$  sei ein (reeller) Banachraum (wir wollen in der gesamten Arbeit stets reelle Vektorräume betrachten). Für  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  gehört  $f : M \rightarrow E$  zur Klasse  $C^k(M, E)$ , falls für jedes  $p \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $p$  existiert, mit

$$f \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi[U], E).$$

Der wichtigste Spezialfall hierbei ist  $E = \mathbb{R}$ . Zur Abkürzung setzen wir  $C^k(M) := C^k(M, \mathbb{R})$ .

Seien nun  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  bzw.  $n$ . Für  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  gehört  $f : M \rightarrow N$  zur Klasse  $C^k(M, N)$ , falls für jedes  $p \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $p$  und eine Karte  $(V, \psi)$  von  $N$  um  $f(p)$  existiert, so dass:

- (i)  $f[U] \subseteq V$ ,
- (ii)  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi[U], \psi[V])$ .

Wir nennen  $f : M \rightarrow N$  einen  $C^k$ -Diffeomorphismus, falls  $f$  bijektiv ist und  $f \in C^k(M, N)$  sowie  $f^{-1} \in C^k(N, M)$  gilt. Die Menge der  $C^k$ -Diffeomorphismen von  $M$  nach  $N$  bezeichnen wir mit  $\text{Diff}^k(M, N)$ . Außerdem setzen wir  $\text{Diff}(M, N) := \text{Diff}^\infty(M, N)$ . Wir wollen noch ein wichtiges Lemma angeben, dass wir im Folgenden öfters benutzen werden.

**Lemma 2.2 (Existenz einer glatten Zerlegung der Eins)** *Sei  $M$  eine glatte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sei eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert eine glatte Zerlegung der Eins, die  $\mathcal{X}$  untergeordnet ist.*

**Beweis:** Siehe [11], Theorem 2.25. □

### 2.1.3 Vektorbündel

Sei  $(M, \tau)$  ein topologischer Raum. Ein (reelles) Vektorbündel von Rang  $k \in \mathbb{N}$  über  $M$  ist ein topologischer Raum  $(V, \sigma)$  zusammen mit einer surjektiven, stetigen Abbildung  $\pi : V \rightarrow M$  mit den Eigenschaften

- (i) Für jedes  $p \in M$  hat die Menge  $V_p := \pi^{-1}(p) \subseteq V$  eine reelle Vektorraumstruktur und  $\dim V_p = k$ .
- (ii) Es existiert eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  von  $M$  sowie Homöomorphismen  $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ , so dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}[U_\alpha] & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha \end{array}$$

für alle  $\alpha \in A$  kommutativ ist, und dass für jedes  $q \in U_\alpha$  die Einschränkung  $\Phi|_{V_q}$  ein linearer Isomorphismus von  $V_q$  nach  $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  ist.

Wenn  $M$  und  $V$  glatte Mannigfaltigkeiten sind, und die  $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  Diffeomorphismen sind, nennt man  $V$  ein glattes Vektorbündel (über  $M$ ). Beispiele : Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Man definiert das Tangentialbündel  $TM$  durch

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M.$$

- (i) Das Tangentialbündel  $TM$  ist ein glattes Vektorbündel.
- (ii) Die Produktmannigfaltigkeit  $M \times \mathbb{R}^k$  mit  $\pi = \pi_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist ein glattes Vektorbündel.

Ein glattes Vektorbündel  $V$  heißt *trivial*, wenn es diffeomorph zu  $M \times \mathbb{R}^k$  ist.

### 2.1.4 Lokale und globale Schnitte von Vektorbündeln

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\pi : V \rightarrow M$  ein glattes Vektorbündel über  $M$ . Eine Abbildung  $\sigma : U \rightarrow V$  einer offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt Schnitt von  $V$  über  $U$ , falls  $\pi \circ \sigma = id_U$  gilt, d.h.  $\forall p \in U : \sigma(p) \in V_p$ . Im Fall  $U = M$  heißt  $\sigma$  globaler, im Fall  $U \subsetneq M$  lokaler Schnitt.  $\sigma$  heißt glatter Schnitt, falls  $\sigma$  glatt ist als Abbildung von  $U$  nach  $V$ .

### 2.1.5 Lokale und globale Rahmen

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $\pi : V \rightarrow M$  ein Vektorbündel und  $U \subseteq M$  eine offene Menge. Schnitte  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  von  $V$  über  $U$  heißen unabhängig, falls für jedes  $p \in U$  ihre Werte  $\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)\}$  linear unabhängig in  $V_p$  sind. Man sagt sie spannen  $V$  auf, falls

$$\text{span}\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)\} = V_p \text{ für alle } p \in U.$$

Ein Rahmen für  $V$  über  $U$  ist ein geordnetes  $k$ -Tupel  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  von unabhängigen Schnitten über  $U$ , die  $V$  aufspannen. D.h. für alle  $p \in U$  ist  $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$  eine (geordnete) Basis für  $V_p$ . Im Fall  $U = M$  nennt man den Rahmen global, sonst lokal. Ein lokaler oder globaler Rahmen heißt glatt, wenn jeder Schnitt  $\sigma_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  glatt ist. Wir wollen noch einen Zusammenhang zwischen Rahmen und Vektorbündeln angeben, den wir später benutzen werden.

**Lemma 2.3** *Ein glattes Vektorbündel ist genau dann trivial, wenn es einen glatten, globalen Rahmen besitzt.*

**Beweis:** Siehe [11], Corollary 5.11.

□



### 2.1.6 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei  $M$  eine glatte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Unter einer Riemannschen Metrik  $g = g_M$  auf  $M$  verstehen wir ein glattes, kovariantes 2-Tensorfeld, d.h. einen glatten Schnitt des Tensorbündels  $T_0^2M$ , das symmetrisch und positiv definit ist. Dies bedeutet insbesondere, dass für jedes  $p \in M$  die Abbildung  $g$  ein Skalarprodukt auf  $T_pM$  definiert.

$$g(p)(X, Y) = g(p)(Y, X), g(p)(Z, Z) > 0, |Z|_g := (g(p)(Z, Z))^{1/2},$$

für  $X, Y, Z \in T_pM$  mit  $Z \neq 0$ .

Manchmal schreiben wir auch  $(X|Y)_g$  für das von  $g$  induzierte Skalarprodukt von  $X$  mit  $Y$ . Das Paar  $(M, g)$  heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein offensichtliches Beispiel für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist  $(\mathbb{R}^m, \eta)$  mit der euklidischen Metrik  $\eta$ , d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}^m$  ist  $\eta(x)$  das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt auf  $T_x\mathbb{R}^m$  unter der Identifikation  $T_x\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ . Wir wollen anmerken, dass eine Riemannsche Metrik keine Metrik im topologischen Sinn ist. Damit keine Verwechslungen entstehen, soll mit dem Wort Metrik allein, immer Metrik im topologischen Sinn gemeint sein. Aus einem Satz von Alexandroff und Urysohn über das Metrisationsproblem folgt, dass jede topologische Mannigfaltigkeit  $(M, \tau)$ , so wie sie oben definiert wurde, metrisierbar ist.

**Beweis:**  $(M, \tau)$  ist lokal euklidischer  $T_2$ -Raum  $\Rightarrow (M, \tau)$  ist lokal kompakter  $T_2$ -Raum  $\Rightarrow (M, \tau)$  ist regulär.

Daher ist also  $(M, \tau)$  ein regulärer  $A_2$ -Raum.  $\Rightarrow$  Beh. □

Im Fall einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit läßt sich explizit eine solche Metrik angeben: Sei  $\Gamma \subseteq M$  eine kompakte, glatte Kurve und  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine Parametrisierung von  $\Gamma$ . Dann definieren wir die Länge von  $\Gamma$  durch

$$L_g(\Gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt.$$

$L_g(\Gamma)$  ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Parametrisierung. Es sei  $I$  ein kompaktes, perfektes Intervall. Der stetige Weg  $\gamma \in C(I, M)$  heißt stückweise glatt in  $(M, g)$ , falls es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  von  $I$  gibt, so dass

$$\gamma_j := \gamma|_{[\alpha_{j-1}, \alpha_j]} \in C^\infty([\alpha_{j-1}, \alpha_j], M) \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Der stückweise glatte Weg  $\eta \in C(J, M)$  bezüglich der Zerlegung  $\mathcal{Z}' = (\beta_0, \dots, \beta_n)$  von  $J$  heißt  $C^\infty$ -Umparametrisierung von  $\gamma$ , falls es

$C^\infty$ -Parameterwechsel

$$\varphi_j \in \text{Diff}([\alpha_{j-1}, \alpha_j], [\beta_{j-1}, \beta_j])$$

gibt, mit  $\gamma_j = \eta_j \circ \varphi_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Auf der Menge aller stückweise glatten Wege in  $(M, g)$  wird eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch

$$\gamma \sim \eta :\Leftrightarrow \eta \text{ ist eine Umparametrisierung von } \gamma$$

erklärt.

Die entsprechenden Äquivalenzklassen heißen stückweise glatte Kurven (in  $(M, g)$ ). Jeder Repräsentant einer stückweise glatten Kurve  $\Gamma$  ist eine stückweise  $C^\infty$ -Parametrisierung von  $\Gamma$ . Ist  $\gamma \in C(I, M)$  eine stückweise  $C^\infty$ -Parametrisierung von  $\Gamma$ , so schreibt man symbolisch  $\Gamma = \sum_{j=1}^n \Gamma_j$ , wobei  $\Gamma_j := [\gamma_j]$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt. Es sei  $\Gamma$  eine stückweise glatte Kurve in  $(M, g)$  mit der Parametrisierung  $\gamma \in C(I, M)$  zur Zerlegung  $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ . Dann wird die Länge von  $\Gamma$  durch

$$L_g(\Gamma) := \sum_{j=1}^n L_g(\Gamma_j) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} |\dot{\gamma}_j(t)|_g dt$$

erklärt. Außerdem definieren wir für  $I = [a, b]$  den Anfangspunkt  $A_\Gamma$ , bzw. den Endpunkt  $E_\Gamma$ , durch  $A_\Gamma := \gamma(a)$  bzw.  $E_\Gamma := \gamma(b)$ .

Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir setzen:  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$(p, q) \mapsto \inf\{L_g(\Gamma); \Gamma \subseteq M \text{ stückw. glatte Kurve mit } A_\Gamma = p \text{ und } E_\Gamma = q\},$$

$d_g$  heißt Riemannsche Abstandsfunktion.

**Satz 2.4** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Topologie  $\tau$ . Dann ist  $d_g$  eine Metrik und es gilt :*

$$(M, \tau) = (M, \tau_{d_g}).$$

**Beweis:** Siehe [11], Proposition 11.20. □

### 2.1.7 Linearer Zusammenhang

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir schreiben  $\mathcal{T}(M)$  für den Raum der glatten Schnitte von  $TM$ . Für  $X \in \mathcal{T}(M)$  bezeichne  $X|_p$  den Wert von  $X$  an

der Stelle  $p \in M$ .

Ein linearer Zusammenhang ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

geschrieben als  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , so dass folgendes gilt :

- (a)  $\nabla$  ist linear über  $C^\infty(M)$  im ersten Argument,  
 $\forall f, g \in C^\infty(M) \forall X_1, X_2, Y \in \mathcal{T}(M) : \nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y.$
- (b)  $\nabla$  ist linear über  $\mathbb{R}$  im zweiten Argument,  
 $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}(M) : \nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2.$
- (c)  $\nabla$  erfüllt die folgende Produktregel,  
 $\forall f \in C^\infty(M) \forall X, Y \in \mathcal{T}(M) : \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y.$

In [10], Lemma 4.2 wird gezeigt, dass  $\nabla_X Y$  nur von den Werten von  $Y$  in einer beliebigen Umgebung von  $p$  und dem Wert von  $X$  an der Stelle  $p$  abhängt. Man kann daher einen linearen Zusammenhang in lokalen Koordinaten "ausrechnen". Sei  $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  ein auf einer offenen Menge  $U \subseteq M$  definierter glatter Rahmen für  $TM$ . Dann gibt es glatte Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$  auf  $U$  mit

$$\nabla_{\sigma_i} \sigma_j = \Gamma_{ij}^k \sigma_k.$$

Die Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$  heißen Christoffel-Symbole von  $\nabla$  bezüglich des Rahmens  $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ . Wir wollen den linearen Zusammenhang benutzen, um zu erklären, was Geodätische sind. Die Geodätischen spielen in der Riemannschen Geometrie dieselbe Rolle, wie die Geraden in der Euklidischen Geometrie. In der Euklidischen Geometrie ist die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Dies ist zumindest lokal auch für Geodätische richtig. Eine weitere Eigenschaft von Geraden ist, dass sie nicht gekrümmt sind, in der Sprache der Analysis bedeutet dies, dass ihre zweite Ableitung verschwindet. Bei den Geodätischen tritt an die Stelle der zweiten Ableitung die kovariante Ableitung.

### 2.1.8 Kovariante Ableitung

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\gamma : I \rightarrow M$  ein glatter Weg. Eine Abbildung  $V : I \rightarrow TM$  mit  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$  für jedes  $t \in I$  heißt Vektorfeld entlang  $\gamma$ . Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T}(\gamma)$  den Raum der glatten Vektorfelder entlang  $\gamma$ . Ein Vektorfeld  $V$  entlang  $\gamma$  heißt fortsetzbar, falls ein Vektorfeld  $\tilde{V}$  existiert, welches auf einer Umgebung von  $\text{im}(\gamma)$  definiert ist und  $V(t) = \tilde{V}|_{\gamma(t)}$  für alle  $t \in I$  erfüllt. Sei  $\nabla$  ein linearer Zusammenhang auf  $M$ . Für jeden glatten Weg  $\gamma : I \rightarrow M$  bestimmt  $\nabla$  einen eindeutigen Operator  $D_t : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $D_t$  ist linear über  $\mathbb{R}$   
 $\forall a, b \in \mathbb{R} \forall V, W \in \mathcal{T}(\gamma) : D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW.$
- (b)  $D_t$  erfüllt die folgende Produktregel,  
 $\forall f \in C^\infty(M) \forall V \in \mathcal{T}(\gamma) : D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV.$
- (c) Sei  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  fortsetzbar, dann gilt für jede Fortsetzung  $\tilde{V}$  von  $V$   
 $D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}.$

Für jedes  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  heißt  $D_tV$  kovariante Ableitung von  $V$  entlang  $\gamma$ .

### 2.1.9 Geodätische

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang  $\nabla$ , und sei  $\gamma : I \rightarrow M$  ein glatter Weg. Der Weg  $\gamma$  heißt Geodätische bezüglich  $\nabla$ , falls gilt

$$D_t\dot{\gamma} \equiv 0.$$

Diese Gleichung wollen wir in lokalen Koordinaten ausdrücken. Sei  $t_0 \in I$  und  $(U, \varphi)$  sei eine Karte von  $M$  um  $\gamma(t_0)$  mit  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ . In Komponenten hat  $\gamma$  die Form  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ . Damit erhalten wir als äquivalente Formulierung die sogenannte Geodätischengleichung

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0$$

für die Komponentenfunktionen von  $\gamma$ . Hierbei haben wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, die wir im folgenden ohne weiteren Kommentar gebrauchen werden. Man kann nun den Satz von Picard-Lindelöf benutzen, um folgendes zu beweisen:

**Satz 2.5 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)** *Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem linearen Zusammenhang  $\nabla$ . Für jedes  $p \in M$ , jedes  $V \in T_pM$  und jedes  $t_0 \in \mathbb{R}$  existiert ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine Geodätische  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\gamma(t_0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(t_0) = V$ . Je zwei solche Geodätische stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Insbesondere existiert eine eindeutig bestimmte maximale Geodätische (d.h. eine maximale Lösung).*

**Beweis:** Siehe [10], Theorem 4.10.

□

Im folgenden setzen wir  $t_0 = 0$  und bezeichnen mit  $\gamma_V$  für  $V \in T_pM$  die eindeutig bestimmte maximale Geodätische mit  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = V$ . Manchmal nennen wir  $\gamma_V$  einfach die Geodätische.

### 2.1.10 Der Riemannsche Zusammenhang

Sei  $(M, g)$  eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein linearer Zusammenhang  $\nabla$  heißt Riemannscher Zusammenhang, falls er mit dem Skalarprodukt verträglich ist und symmetrisch ist. Wir fügen daher noch zwei weitere Punkte zu den oben beschriebenen Eigenschaften eines linearen Zusammenhangs hinzu.

- (d)  $\nabla$  ist mit dem Skalarprodukt verträglich,  
 $\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M) : \nabla_X(Y|Z)_g = (\nabla_X Y|Z)_g + (Y|\nabla_X Z)_g$ .
- (e)  $\nabla$  ist symmetrisch,  
 $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M) : \nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y]$ .

Hierbei gilt  $\nabla_X(Y|Z)_g := X((Y|Z)_g)$  und  $[X, Y]$  steht für die Lie-Klammer von  $X$  und  $Y$ .

#### Satz 2.6 (Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie)

*Sei  $(M, g)$  eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Riemannscher Zusammenhang  $\nabla$  auf  $M$ , manchmal auch Levi-Civita-Zusammenhang genannt.*

**Beweis:** Siehe [10], Theorem 5.4. □

Im folgenden wollen wir unter einem linearen Zusammenhang auf einer glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  stets einen Riemannschen Zusammenhang verstehen. Auch Geodätische auf  $M$  sind dabei stets im Bezug auf den Riemannschen Zusammenhang zu verstehen.

Es sei  $I := [a, b]$  ein kompaktes, perfektes Intervall und  $\varepsilon > 0$ . Wir nennen einen Weg  $\eta : I \rightarrow M$  regulär in  $(M, g)$ , falls  $\eta$  glatt ist und  $\dot{\eta}(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt. Der stetige Weg  $\eta \in C(I, M)$  heißt stückweise regulär in  $(M, g)$ , wenn es eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  von  $I$  gibt, so dass  $\eta|_{[\alpha_{j-1}, \alpha_j]}$  ein regulärer Weg ist für  $j = 1, \dots, n$ . Analog zu Abschnitt 2.1.6 erklären wir stückweise reguläre Kurven als Äquivalenzklassen dieser Wege. Wir wollen festhalten, dass stückweise reguläre Kurven immer nach der Bogenlänge parametrisiert werden können. Sei  $\eta : I \rightarrow M$  ein stückweise regulärer Weg. Eine Funktion  $\gamma \in C((-\varepsilon, \varepsilon) \times I, M)$  heißt Variation von  $\eta$ , wenn gilt:

- Es existiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  von  $I$ , so dass  $\gamma|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\alpha_{j-1}, \alpha_j]}$  glatt ist für  $j = 1, \dots, n$ .
- $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$  ist ein stückweise regulärer Weg für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

- $\gamma_0(t) = \eta(t)$  für alle  $t \in I$ .

Zur Abkürzung setzen wir  $\Gamma_s := [\gamma_s]$  sowie  $V(t) := \partial_s \gamma(0, t)$  und erhalten folgendes Lemma.

**Lemma 2.7 (Erste Variationsformel)** *Sei  $\Psi$  eine stückweise reguläre Kurve und  $\eta : I \rightarrow M$  eine Parametrisierung von  $\Psi$  nach der Bogenlänge. Ferner sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$  eine Variation von  $\eta$ . Dann gilt,*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = (V(b) | \dot{\eta}(b))_g - (V(a) | \dot{\eta}(a))_g - \int_a^b (V | D_t \dot{\eta})_g dt - \sum_{i=1}^{n-1} (V(\alpha_i) | \Delta_i \dot{\eta})_g.$$

wobei  $\Delta_i \dot{\eta} = \dot{\eta}(\alpha_i^+) - \dot{\eta}(\alpha_i^-)$  der ‘‘Sprung’’ von  $\dot{\eta}$  an der Stelle  $\alpha_i$  ist.

**Beweis:** Siehe [10], Proposition 6.5. □

### 2.1.11 Exponential-Abbildung

Sei  $(M, g)$  eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir setzen  $\mathcal{E} := \{V \in TM; \text{dom}(\gamma_V) \supseteq [0, 1]\}$  und definieren die Exponential-Abbildung

$$\exp : \mathcal{E} \rightarrow M, V \mapsto \gamma_V(1).$$

Für jedes  $p \in M$  bezeichnen wir mit  $\exp_p$  die Einschränkung von  $\exp$  auf  $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_p M$ .

**Lemma 2.8 (Eigenschaften der Exponential-Abbildung)**

(a)  $\mathcal{E}$  ist eine offene Teilmenge von  $TM$  mit  $M_0 := \{(p, 0); p \in M\} \subseteq \mathcal{E}$  und jedes  $\mathcal{E}_p$  ist sternförmig (bzgl. 0).

(b) Für jedes  $(p, V) \in TM$  ist die Geodätische  $\gamma_V$  gegeben durch

$$\gamma_V(t) = \exp(tV), t \in \text{dom}(\gamma_V).$$

(c) Die Exponential-Abbildung ist glatt.

**Beweis:** Siehe [10], Proposition 5.7. □

**Lemma 2.9 (Normal-Umgebungs-Lemma)** *Für jedes  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $V$  um  $(p, 0)$  in  $T_p M$  sowie eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$ , so dass gilt*

$$\exp_p \in \text{Diff}(V, U).$$

**Beweis:** Siehe [10], Lemma 5.10. □

Eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$ , die das diffeomorphe Bild einer sternförmigen (bzgl.  $0 \in T_p M$ ) offenen Umgebung  $V$  von  $0 \in T_p M$  unter  $\exp_p$  ist, nennt man Normal-Umgebung von  $p$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\exp_p$  ein Diffeomorphismus von  $\varepsilon \mathbb{B}_{d|g(p)} \subseteq T_p M$  auf sein Bild ist, so nennt man  $B(p, \varepsilon) := \exp_p[\varepsilon \mathbb{B}_{d|g(p)}]$  einen geodätischen Ball in  $M$  um  $p$ . Hierbei steht  $\mathbb{B}_{d|g(p)}$  für den Einheitsball in  $T_p M$ . Die geodätischen Bälle werden sich im folgenden als sehr nützlich erweisen. Sei  $U$  eine Normal-Umgebung von  $p$  und  $q \in U$ . Dann gibt es eine Geodätische von  $p$  nach  $q$ , die ganz in  $U$  verläuft. Solche Geodätische nennt man radiale Geodätische. Sei  $\{E_1, \dots, E_m\}$  ONB von  $T_p M$  (bzgl.  $g$ ). Dann ist  $E : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ ,  $x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto \sum_{i=1}^m x^i E_i$  ein Isomorphismus. Daher ist  $\varphi := E^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild.  $(x^1, \dots, x^m) = \varphi$  heißen Normalkoordinaten um  $p$  und wir nennen  $(U, \varphi)$  bzw.  $(U, (x^1, \dots, x^m))$  eine Normal-Karte für  $M$  um  $p$ . Schließlich definieren wir die radiale Abstandsfunktion  $r$  durch

$$r(\cdot) := |\varphi(\cdot)| = \left( \sum_{i=1}^m (x^i(\cdot))^2 \right)^{1/2},$$

und das radiale Einheitsvektorfeld  $\partial/\partial r$  durch

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Bemerkung 2.10** *Sei  $p \in M$  und  $U$  eine Normalumgebung von  $p$ .*

- (a) *An jedem Punkt  $q \in U \setminus \{p\}$  ist  $\partial/\partial r$  der Geschwindigkeitsvektor der, nach der Bogenlänge parametrisierten, Geodätischen von  $p$  nach  $q$  und hat daher Länge 1 (bzgl.  $g$ ).*
- (b) *In jedem geodätischen Ball  $B(p, R)$  stimmt die radiale Abstandsfunktion  $r(\cdot)$  mit dem Riemannschen Abstand  $d_g(p, \cdot)$  zu  $p$  überein.*

**Beweis:**

- (a) Dies folgt direkt aus der Definition einer Normalumgebung.
- (b) Dies ist eine Konsequenz aus dem Gauss-Lemma ([10], Theorem 6.8 - Corollary 6.11).

□

Sei  $U$  eine Normalumgebung von  $p$ . Für  $q \in U$  gibt es eine Geodätische, die durch  $p$  und  $q$  läuft. Dagegen ist es für zwei Punkte  $q_1, q_2 \in U$  i.A. nicht klar, ob es eine Geodätische von  $q_1$  nach  $q_2$  gibt, geschweige denn, ob die Geodätische ganz in  $U$  liegt. Die erste Frage, ob es eine Umgebung  $U$  von  $p$  gibt, so dass je zwei Punkte  $q_1, q_2 \in U$  durch eine Geodätische verbunden werden können, ist leichter zu beantworten. Wir nennen eine Teilmenge  $W \subseteq M$  uniform-normal, falls

$$\exists \delta > 0 \forall p \in W : W \subseteq B(p, \delta).$$

**Lemma 2.11 (Uniform-Normal-Umgebungs-Lemma)** *Sei  $p \in M$  und  $U$  eine Umgebung von  $p$ . Dann existiert eine uniform-normale Umgebung  $W$  von  $p$  mit  $W \subseteq U$ .*

**Beweis:** Siehe [10], Lemma 5.12.

□

Der zweite Teil ist nicht so einfach zu beantworten. Dies führt zum Begriff der geodätischen Konvexität. Eine Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt geodätisch konvex, wenn je zwei Punkte  $p, q \in U$  durch eine eindeutige, minimierende Geodätische in  $M$ , die ganz in  $U$  verläuft, verbunden werden können. Eine stückweise glatte Kurve  $\Gamma$  heißt minimierend, wenn für jede stückweise glatte Kurve  $\tilde{\Gamma}$  mit  $A_{\tilde{\Gamma}} = A_{\Gamma}$  und  $E_{\tilde{\Gamma}} = E_{\Gamma}$  folgt  $L(\Gamma) \leq L(\tilde{\Gamma})$ . Der nächste Satz zeigt, dass die geodätisch konvexen Mengen sogar eine Umgebungsbasis bilden.

**Satz 2.12 (Whitehead)** *Sei  $p \in M$  und  $U$  eine Umgebung von  $p$ . Dann existiert ein geodätischer Ball  $B(p, \varepsilon)$  mit  $B(p, \varepsilon) \subseteq U$  und  $B(p, \varepsilon)$  ist geodätisch konvex.*

**Beweis:** Siehe [3], Theorem 10.5.4.

□



**Lemma 2.13** Sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $\eta$  bezeichne die euklidische Metrik. Für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq U$  existieren  $c, C > 0$ , so dass für alle  $x \in K$  und alle  $V \in T_x \mathbb{R}^m$  gilt,

$$c|V|_\eta \leq |V|_g \leq C|V|_\eta.$$

**Beweis:** Wir setzen

$$L := \{(x, V) \in T\mathbb{R}^m; x \in K, |V|_\eta = 1\}.$$

Wir können  $T\mathbb{R}^m$  mit  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  und daher auch  $L$  mit  $K \times \mathbb{S}^{m-1}$  identifizieren. Somit ist  $L$  kompakt. Weil die Norm  $|\cdot|_g$  stetig und strikt positiv auf  $L$  ist, existieren  $c, C > 0$  mit  $c \leq |V|_g \leq C$  für  $(x, V) \in L$ . Sei nun  $x \in K$ ,  $V \in T_x \mathbb{R}^m$  mit  $V \neq 0$  sowie  $\lambda := |V|_\eta$ . Dann haben wir  $(x, \lambda^{-1}V) \in L$  und

$$|V|_g = \lambda|\lambda^{-1}V|_g \leq \lambda C = C|V|_\eta.$$

Analog folgt  $|V|_g \geq c|V|_\eta$ . Für  $V = 0$  ist die Aussage trivialerweise richtig.  $\square$

**Korollar 2.14** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.  $\tau$  bezeichne die Topologie auf  $M$  und  $\sigma$  die auf  $TM$ . Für  $O \in \tau$  und  $\delta > 0$  setzen wir  $O_\delta := \{(p, V) \in TM; p \in O, |V|_g < \delta\}$ . Dann folgt,  $O_\delta \in \tau$  und

$$\forall p \in M \forall U \in \mathcal{U}_\sigma((p, 0)) \exists O \in \tau \exists \delta > 0 : p \in O_\delta \subseteq U.$$

**Beweis:** Für  $O \in \tau$  und  $\delta > 0$  sieht man leicht durch Übergang zu lokalen Koordinaten, dass  $O_\delta$  offen ist in  $\tau$ .

Sei nun  $p \in M$ ,  $U \in \mathcal{U}_\sigma((p, 0))$ . Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass mit Normal-Koordinaten  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  gilt,

$$\mathcal{X} := \{(q, V) \in TM; q \in B(p, 2\varepsilon), |V|_\eta < 2\varepsilon\} \subseteq U.$$

Aus dem vorherigen Lemma folgt, dass es  $c, C > 0$  gibt mit

$$c|V|_\eta \leq |V|_g \leq C|V|_\eta, \quad V \in T_q M, \quad q \in \overline{B(q, \varepsilon)}.$$

Sei  $O := B(p, \varepsilon)$ ,  $\delta := c\varepsilon$ . Dann haben wir für  $(x, V) \in O_\delta$ ,

$$|V|_\eta \leq c^{-1}|V|_g < \varepsilon.$$

Also  $O_\delta \subseteq \mathcal{X} \subseteq U$ .  $\square$

### 2.1.12 Riemannsche Untermannigfaltigkeiten und zweite Fundamentalform

Sei  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $\tilde{m}$  und  $M$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m < \tilde{m}$ , d.h.  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$  ist eine topologische Einbettung (ein Homöomorphismus auf sein Bild) und  $\iota$  ist eine Immersion. Durch  $g := \iota^* \tilde{g}$  wird eine Riemannsche Metrik auf  $M$  definiert. In diesem Fall heißt  $(M, g)$  Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Wir setzen

$$T\tilde{M}|_M := \coprod_{p \in M} T_p \tilde{M}.$$

Dies ist ein glattes Vektorbündel über  $M$ . An jedem Punkt  $p \in M$  lässt sich  $T_p \tilde{M}$  in eine orthogonale direkte Summe (bzgl.  $\tilde{g}$ ) zerlegen, d.h.  $T_p \tilde{M} = T_p M \oplus N_p M$ , wobei  $N_p M := (T_p M)^\perp$ .

$$NM := \coprod_{p \in M} N_p M$$

heißt Normalbündel von  $M$ .  $NM$  ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $T\tilde{M}$ . Für jedes  $p \in M$  existiert ein glatter, angepasster, orthonormaler Rahmen, d.h. es existiert eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  in  $\tilde{M}$  und ein glatter orthonormaler Rahmen  $(E_1, \dots, E_{\tilde{m}})$  für  $T\tilde{M}$  auf  $\tilde{U}$ , so dass  $(E_1, \dots, E_m)$  ein glatter orthonormaler Rahmen für  $TM$  und  $(E_{m+1}, \dots, E_{\tilde{m}})$  ein glatter orthonormaler Rahmen für  $NM$  auf  $\tilde{U} \cap M$  ist. Siehe [11], Lemma 10.17 und Proposition 11.24. (Der Beweis benutzt im Wesentlichen das Gram-Schmidt-Verfahren.)

Indem man in jedem Punkt  $p \in M$ ,  $T_p \tilde{M}$  auf  $T_p M$  bzw.  $N_p M$  projiziert erhält man zwei Abbildungen, die Tangential- bzw. Normalprojektion,

$$\begin{aligned} \pi^\top &: T\tilde{M}|_M \rightarrow TM, \\ \pi^\perp &: T\tilde{M}|_M \rightarrow NM. \end{aligned}$$

In Bezug auf einen angepassten orthonormalen Rahmen, sind dies die gewöhnlichen Projektionen auf  $\text{span}(E_1, \dots, E_m)$  bzw.  $\text{span}(E_{m+1}, \dots, E_{\tilde{m}})$ , daher bilden beide Projektionen glatte Schnitte auf glatte Schnitte ab. Mit  $\mathcal{T}(\tilde{M}|_M)$  bzw.  $\mathcal{N}(M)$  bezeichnen wir den Raum der glatten Schnitte von  $T\tilde{M}|_M$  bzw.  $NM$ . Für  $X \in \mathcal{T}(\tilde{M}|_M)$  schreiben wir manchmal kurz  $X^\top := \pi^\top(X)$  bzw.  $X^\perp := \pi^\perp(X)$  für die Tangential bzw. Normalprojektion.

Da glatte Vektorfelder auf  $M$  zu glatten Vektorfeldern auf  $\tilde{M}$  erweitert werden können, ist es sinnvoll den Riemannschen Zusammenhang  $\nabla$  auf  $M$  mit dem Riemannschen Zusammenhang  $\tilde{\nabla}$  auf  $\tilde{M}$  zu vergleichen.

Seien  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ . Bezeichne  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{T}(\tilde{M})$  Erweiterungen von  $X$  bzw.  $Y$ . Wir können  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$  an jedem Punkt  $p \in M$  zerlegen:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\top + (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^\perp.$$

Es stellt sich heraus, dass  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}(p)$  für  $p \in M$  unabhängig von den Erweiterungen  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  ist. Deswegen schreiben wir  $\tilde{\nabla}_X Y$  statt  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ . Die Abbildung

$$II : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{N}(M), (X, Y) \mapsto (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

heißt zweite Fundamentalform (der Begriff erste Fundamentalform wird manchmal für die Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  benutzt).

**Lemma 2.15** *Die zweite Fundamentalform ist*

- (a) *unabhängig von den Erweiterungen von  $X$  und  $Y$*
- (b) *bilinear über  $C^\infty(M)$*
- (c) *symmetrisch in  $X$  und  $Y$ .*

**Beweis:** Siehe [10], Lemma 8.1. □

Die Gaußformel erklärt schließlich den Tangentialteil in der Zerlegung von  $\tilde{\nabla}_X Y$ .

**Satz 2.16 (Gauß-Formel)** *Seien  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  beliebig fortgesetzt zu Vektorfeldern auf  $\tilde{M}$ . Dann gilt entlang  $M$  die folgende Formel,*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

**Beweis:** Siehe [10], Theorem 8.2. □

### 2.1.13 Die mittlere Krümmung von Hyperflächen

Sei für den Rest dieses Abschnitts  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine glatte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $m + 1$ . Außerdem sei  $(M, g)$  eine orientierbare Hyperfläche, d.h.  $(M, g)$  ist eine eingebette, orientierbare Riemannsche Untermannigfaltig der Dimension  $m$  und es gilt  $g = \iota^*\tilde{g}$ , wobei  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$  die Einbettung bezeichnet. Ein Einheitsnormalenfeld  $\nu$  auf  $M$  ist ein glatter, globaler Rahmen für  $NM$  mit  $|\nu|_{\tilde{g}} = 1$ .

**Lemma 2.17** *Unter obigen Voraussetzungen existiert ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$ .*

**Beweis:** Sei  $p \in T_p M$ ,  $(v_1, \dots, v_m)$  eine positive Basis von  $T_p M$ . Dann existiert genau ein  $\nu(p) \in N_p M$  mit  $|\nu(p)|_{\tilde{g}} = 1$ , derart dass  $(v_1, \dots, v_m, \nu(p))$  eine positive Basis von  $T_p \tilde{M}$  ist. Wir setzen

$$\boldsymbol{\nu} : M \rightarrow NM, p \mapsto (p, \nu(p)).$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der positiven Basis:

Sei  $(w_1, \dots, w_m)$  eine weitere positive Basis von  $T_p M$ , sowie  $\mu(p) \in N_p M$  mit  $|\mu(p)|_{\tilde{g}} = 1$ , so dass  $(w_1, \dots, w_m, \mu(p))$  eine positive Basis von  $T_p \tilde{M}$  ist. Wegen  $\dim(N_p M) = 1$  folgt  $\mu(p) = \pm \nu(p)$ . Bezeichne  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  die Übergangsmatrix von  $(w_1, \dots, w_m)$  nach  $(v_1, \dots, v_m)$ . Die Übergangsmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$  von  $(w_1, \dots, w_m, \mu(p))$  nach  $(v_1, \dots, v_m, \nu(p))$  ist dann durch

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \pm 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Daher haben wir  $\det \mathbf{B} > 0 \Leftrightarrow \mu(p) = \nu(p)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\boldsymbol{\nu}$  glatt ist. Sei  $(E_1, \dots, E_{m+1})$  ein glatter, angepasster, orthonormaler Rahmen, der auf einer offenen, zusammenhängenden Umgebung  $\tilde{U}$  von  $p$  in  $\tilde{M}$  definiert ist. Sei außerdem  $U \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{M}$  eine offene, zusammenhängende Umgebung von  $p$  in  $M$ . Indem wir gegebenenfalls  $E_1$  durch  $-E_1$  ersetzen, können wir annehmen, dass  $(E_1, \dots, E_m)$  positiv orientiert ist auf  $U$ . Für ein  $\delta \in \{-1, 1\}$  ist  $(E_1, \dots, E_m, \delta E_{m+1})$  positiv orientiert auf  $\tilde{U}$ . Daher haben wir

$$\boldsymbol{\nu}(p) = \delta E_{m+1}|_p, \text{ für } p \in U.$$

□

Die Unterscheidung zwischen  $\nu$  und  $\boldsymbol{\nu}$  sollte nur die Lesbarkeit des Beweises erhöhen. Wir wollen im folgenden keine Unterscheidung mehr vornehmen. Man sagt, dass man  $\boldsymbol{\nu}$  mit seinem Hauptteil  $\nu$  identifiziert. Mit der zweiten Fundamentalform und dem glatten Einheitsnormalenfeld  $\nu$  kann man durch

$$h(X, Y) := (II(X, Y)|\nu)_{\tilde{g}}, \text{ für } X, Y \in \mathcal{T}(M)$$

ein glattes 2-Tensorfeld, d.h.  $h \in \mathcal{T}_0^2(M)$ , definieren. Bezeichne  $\Omega^1(M)$  den Raum der glatten Pfaffschen-Formen auf  $M$ . Dann setzen wir

$$h^\sharp(\omega, Y) := h(\omega^\sharp, Y) \text{ für } \omega \in \Omega^1(M), Y \in \mathcal{T}(M).$$

Dann gilt  $h^\sharp \in \mathcal{T}_1^1(M)$ . “ $\sharp$ ” steht für Erhöhen des Index. Grob gesprochen bedeutet dies, dass in jedem Punkt  $p \in M$ ,  $\omega(p) \in T_p^*M$  durch das Inverse des Rieszschen-Isomorphismus  $\Phi_p$  in ein Element von  $T_pM$  abgebildet wird. Also:  $\omega^\sharp(p) = \Phi_p^{-1}(\omega(p))$ . Analog definiert man das Erniedrigen “ $\flat$ ”. Für jedes  $p \in M$  kann man  $T_1^1(T_pM)$  mit  $\mathcal{L}(T_pM)$  identifizieren (vgl. [2], Bemerkung XI.2.20(b)). Daher erhalten wir ein Endomorphismenfeld  $S$  über  $M$ , welches durch

$$h^\sharp(\omega, Y) = \langle \omega, SY \rangle, \quad \omega \in \Omega^1(M), Y \in \mathcal{T}(M)$$

charakterisiert wird.  $S$  heißt Form-Operator. Für  $X, Y \in \mathcal{T}(M)$  gilt:

$$(II(X, Y)|\nu)_{\bar{g}} = h(X, Y) = h^\sharp(X^\flat, Y) = \langle X^\flat, SY \rangle = (X|SY)_g.$$

Die Symmetrie von  $II$  bewirkt, dass  $S|_p$  ein selbstadjungierter Endomorphismus auf  $T_pM$  ist. Daher finden wir eine ONB  $\{e_1, \dots, e_m\}$  von  $T_pM$  bestehend aus Eigenvektoren von  $S|_p$  und entsprechende reelle Eigenwerte  $\sigma(S|_p) = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ , so dass  $S|_p$  in dieser Basis als Diagonalmatrix  $\text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  dargestellt wird. In dieser Situation nennt man  $\kappa_j$  die  $j$ -te Hauptkrümmung in die  $j$ -te Hauptrichtung  $e_j$ . Schließlich definieren wir die mittlere Krümmung  $H$  im Punkt  $p \in M$  durch

$$H(p) := -\frac{1}{m} \text{spur}(S|_p) = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \kappa_k.$$

Manchmal schreibt man auch  $H_M$  oder  $H_{(M, \nu)}$  statt  $H$ , um zu betonen, dass sich die mittlere Krümmung auf  $M$  bezieht und ihr Vorzeichen von der Orientierung von  $\nu$  abhängt. Ist  $M$  kompakt, so heißt

$$\bar{H} := \bar{H}_M := \frac{\int_M H do}{\int_M do}$$

gemittelte mittlere Krümmung von  $M$ .

## 2.2 Topologische Hilfsmittel

### 2.2.1 Initialtopologie

Wir wollen später bestimmte Funktionenräume auf Separabilität untersuchen, deren Topologie eine Initialtopologie ist. Daher gehen wir kurz auf den Begriff der Initialtopologie ein und beweisen einen Hilfssatz, den wir später benutzen wollen.

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $\beta \subseteq \tau$ .

$$\begin{aligned} \beta \text{ Basis von } \tau & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}_\tau(x) \exists B \in \beta : x \in B \subseteq U \\ \beta \text{ Subbasis von } \tau & \quad :\Leftrightarrow \quad \{\bigcap \beta^*; \beta^* \in \mathcal{P}_e \beta\} \text{ Basis von } \tau. \end{aligned}$$

Hierbei steht  $\mathcal{P}_e\beta$  für die Menge der endlichen Teilmengen von  $\beta$ .

Ist  $((X_i, \tau_i); i \in I) \neq \emptyset$  eine Familie topologischer Räume,  $\emptyset \neq X$  eine Menge und  $(f_i; i \in I)$  eine Familie von Funktionen mit  $f_i : X \rightarrow X_i$  für jedes  $i \in I$ , so heißt die Topologie  $\tau$  mit Subbasis

$$\{f_i^{-1}[O_i]; O_i \in \tau_i, i \in I\}$$

Initialtopologie der Familie  $((X_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ . Entsprechend heißt  $(X, \tau)$  Initialraum dieser Familie. Die Initialtopologie ist die mengenmäßig kleinste Topologie  $\tau'$  auf  $X$ , bezüglich der alle  $f_i$  stetig sind. Beispiel für Initialtopologien sind die Produkttopologien (für  $X = \prod_{i \in I} X_i$ ,  $f_i = \pi_i$  ist die Initialtopologie gerade die Produkttopologie).

**Lemma 2.18** *Sei  $(X, \tau)$  Initialraum der Familie  $((X_i, \tau_i); i \in I)$  und für jedes  $i \in I$  sei  $\beta_i$  eine Basis von  $\tau_i$ . Dann ist  $\{f_i^{-1}[O_i]; O_i \in \beta_i, i \in I\}$  eine Subbasis von  $\tau$ .*

**Beweis:** Sei  $x \in X$ ,  $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ .

$$\exists I^* \in \mathcal{P}_e I \forall i \in I^* \exists O_{i,1}, \dots, O_{i,n_i} \in \tau_i : x \in \bigcap_{i \in I^*} \bigcap_{j=1}^{n_i} f_i^{-1}[O_{i,j}] \subseteq U.$$

Für  $i \in I^*$  setzen wir  $O_i := \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{i,j} \in \tau_i$ .

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I^*} \bigcap_{j=1}^{n_i} f_i^{-1}[O_{i,j}] = \bigcap_{i \in I^*} f_i^{-1}[O_i].$$

$\forall i \in I^* \exists B_i \in \beta_i : f_i(x) \in B_i \subseteq O_i$ .

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I^*} f_i^{-1}[B_i] \subseteq U \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

## 2.2.2 Lebesguescher Überdeckungssatz

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $S \subseteq X$  bezeichne

$$\text{diam}(S) := \sup_{x,y \in S} d(x, y)$$

den Durchmesser von  $S$ . Sei  $\mathcal{O} \subseteq \tau_d$  eine Überdeckung von  $X$ . Man nennt  $a \in (0, \infty)$  eine Lebesgue-Zahl von  $\mathcal{O}$ , falls gilt,

$$\forall S \subseteq X : \text{diam}(S) < a \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O} : S \subseteq O.$$

Der Lebesguesche Überdeckungssatz besagt, dass in einem kompakten metrischen Raum jede Überdeckung  $\mathcal{O} \subseteq \tau_d$  von  $X$  eine Lebesgue-Zahl hat. (Siehe [8], Satz 4.1-2.)

### 2.2.3 Stetige Einbettungen

Es seien  $(X, \tau)$  und  $(Y, \sigma)$  topologische Räume, und  $X$  sei eine Teilmenge von  $Y$ . Bezeichnet  $j : X \rightarrow Y, x \mapsto x$  die Inklusion von  $X$  in  $Y$ , so sagen wir,  $X$  sei stetig in  $Y$  eingebettet, wenn  $j$  stetig ist. In diesem Fall schreiben wir  $X \hookrightarrow Y$ . Ist außerdem  $X$  eine dichte Teilmenge von  $Y$ , so bringen wir dies durch  $X \xrightarrow{d} Y$  zum Ausdruck. Sind  $(X, \tau)$  und  $(Y, \sigma)$  topologische Vektorräume, so soll  $X \hookrightarrow Y$  immer zusätzlich bedeuten, dass  $X$  ein Untervektorraum von  $Y$  (und nicht "irgendwie" in  $Y$  enthalten) ist.

**Lemma 2.19** *Seien  $(V, \tau), (W, \sigma)$  Fréchet-Räume und  $(X, \varrho)$  sei ein  $T_2$ -topologischer Vektorraum. Ferner gelte  $V \hookrightarrow X, W \hookrightarrow X$  und  $V \subseteq W$ .*

*Dann gilt,  $V \hookrightarrow W$ .*

**Beweis:** Mit  $j : V \rightarrow W, x \mapsto x$ , sei  $(x, y) \in \overline{\text{graph}(j)}^{\tau \times \sigma}$  sowie

$$(x_n, j(x_n)) \in \text{graph}(j)^{\mathbb{N}} : (x_n, j(x_n)) \rightarrow_{\tau \times \sigma} (x, y).$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow_{\tau} x \wedge x_n = j(x_n) \rightarrow_{\sigma} y$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow_{\varrho} x \wedge x_n = j(x_n) \rightarrow_{\varrho} y$$

$$\Rightarrow j(x) = x = y$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \text{graph}(j).$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. (Siehe [8], Korollar 6.2-1.3.)

□

# Kapitel 3

## Kleine Hölderräume

In diesem Kapitel geht es darum, kleine Hölderräume auf dem  $\mathbb{R}^m$  und auf kompakten, zusammenhängenden, glatten Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  zu definieren. Deswegen wollen wir uns zunächst allgemein mit Hölderstetigen Funktionen beschäftigen.

### 3.1 Hölder-Stetigkeit

Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $\alpha \in (0, 1)$ . Wir definieren für  $f \in Y^X$  und  $U \subseteq X$  mit  $|U| > 1$

$$[f]_{\alpha, U} := \sup_{x, y \in U, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha}$$

und

$$[f]_{1-, U} := \sup_{x, y \in U, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}.$$

Außerdem setzen wir  $[f]_\alpha := [f]_{\alpha, X}$  bzw.  $[f]_{1-} := [f]_{1-, X}$  und der Vollständigkeit halber  $[f]_{\alpha, \{x\}} := 0$  bzw.  $[f]_{1-, \{x\}} := 0$  für  $x \in X$ . Wir bezeichnen mit

$$C^\alpha(X, Y) := \{f \in Y^X; \forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x) : [f]_{\alpha, U} < \infty\}$$

die Menge der lokal- $\alpha$ -Hölder-stetigen Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . Unter

$$C^{1-}(X, Y) := \{f \in Y^X; \forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x) : [f]_{1-, U} < \infty\}$$

verstehen wir die Menge der lokal-Lipschitz-stetigen Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . Schließlich stehen

$$BUC^\alpha(X, Y) := \{f \in B(X, Y); [f]_\alpha < \infty\}$$



und

$$BUC^{1-}(X, Y) := \{f \in B(X, Y); [f]_{1-} < \infty\}$$

für die Menge der beschränkten und gleichmäßig  $\alpha$ -Hölder-stetigen bzw. Lipschitz-stetigen Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . In Vorbereitung auf die kleinen Hölderräume wollen wir folgende Teilmengen definieren.

$$c^\alpha(X, Y) := \{f \in C^\alpha(X, Y); \forall x \in X : \lim_{\delta \rightarrow 0} [f]_{\alpha, \mathbb{B}(x, \delta)} = 0\}$$

und

$$buc^\alpha(X, Y) := \{f \in BUC^\alpha(X, Y); \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in X, 0 < d_X(x, y) < \delta} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha} = 0\}.$$

Offensichtlich gilt  $buc^\alpha(X, Y) \subseteq c^\alpha(X, Y)$ . Wir werden im Folgenden sehen, dass die Inklusion im Allgemeinen echt ist, d.h.  $buc^\alpha(X, Y) \subsetneq c^\alpha(X, Y)$ . Aber für den Fall, dass  $(X, \tau_d)$  kompakt ist, Gleichheit gilt, d.h.  $buc^\alpha(X, Y) = c^\alpha(X, Y)$ .

**Lemma 3.1 (Elementare Eigenschaften I)** *Es seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$  metrische Räume und  $\alpha \in (0, 1)$ .*

$$(a) \forall f \in C^\alpha(X, Y) \forall U \subseteq X : [f]_{\alpha, U} = 0 \Leftrightarrow f|_U = \text{const.}$$

$$(b) C^\alpha(X, Y) \subseteq C(X, Y).$$

$$(c) BUC^\alpha(X, Y) \subseteq BUC(X, Y).$$

$$(d) \text{Sei } \beta \in (0, 1) \text{ mit } \beta < \alpha. \text{ Dann gilt:} \\ C^{1-}(X, Y) \subseteq C^\alpha(X, Y) \subseteq c^\beta(X, Y).$$

$$(e) \text{Sei } \beta \in (0, 1) \text{ mit } \beta < \alpha. \text{ Dann gilt:} \\ BUC^{1-}(X, Y) \subseteq BUC^\alpha(X, Y) \subseteq buc^\beta(X, Y).$$

$$(f) \text{Sei } f \in C^{1-}(X, Y), g \in C^\alpha(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \in C^\alpha(X, Z).$$

$$(g) \text{Sei } f \in C^{1-}(X, Y), g \in c^\alpha(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \in c^\alpha(X, Z).$$

**Beweis:**

$$(a) \text{“}\Leftarrow\text{” Dies ist klar.} \\ \text{“}\Rightarrow\text{”}$$

$$[f]_{\alpha, U} = 0 \Rightarrow \forall x, y \in U : d_Y(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow \forall x, y \in U : f(x) = f(y).$$

- (b) Sei  $f \in C^\alpha(X, Y)$ ,  $x_0 \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Es existiert  $U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0) : [f]_{\alpha, U} < \infty$ . Für  $[f]_{\alpha, U} = 0$  folgt  $f|_U = 0$  und somit die Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ . Für  $[f]_{\alpha, U} \neq 0$  sei  $0 < \delta < \varepsilon^{1/\alpha} [f]_{\alpha, U}^{-1/\alpha}$  mit  $\mathbb{B}(x_0, \delta/2) \subseteq U$ .

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq [f]_{\alpha, U} [d_X(x, y)]^\alpha < [f]_{\alpha, U} \delta^\alpha < \varepsilon, \quad x, y \in \mathbb{B}(x_0, \delta/2).$$

$\Rightarrow$  Beh.

- (c) analog zu (b).

- (d) Sei  $f \in C^{1-}(X, Y)$ ,  $x_0 \in X$  und  $U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0) : [f]_{1-, U} < \infty$ . Ferner sei  $0 < \delta < 1$  mit  $\mathbb{B}(x_0, \delta/2) \subseteq U$ .

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha} \leq \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \leq [f]_{1-, U}, \quad x, y \in \mathbb{B}(x_0, \delta/2) \text{ mit } x \neq y$$

$\Rightarrow f \in C^\alpha(X, Y)$ .

Sei nun  $f \in C^\alpha(X, Y)$ ,  $x_0 \in X$  und  $U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0) : [f]_{\alpha, U} < \infty$ . Ferner sei  $\delta > 0$  mit  $\mathbb{B}(x_0, \delta) \subseteq U$ . Dann gilt für  $x, y \in \mathbb{B}(x_0, \delta)$ ,

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\beta} = \frac{1}{[d_X(x, y)]^{\beta-\alpha}} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha} \leq [f]_{\alpha, U} [d_X(x, y)]^{\alpha-\beta} \leq 2 [f]_{\alpha, U} \delta^{\alpha-\beta}.$$

Hieraus folgt,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [f]_{\beta, \mathbb{B}(x_0, \delta)} = 0,$$

und daher  $f \in c^\beta(X, Y)$ .

- (e) Sei  $f \in BUC^{1-}(X, Y)$  und  $x, y \in X$ .

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha} \leq \begin{cases} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} & \text{falls } d_X(x, y) \leq 1 \\ \sup\{d_Y(f(x), f(y)); x, y \in X\} & \text{falls } d_X(x, y) > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f]_\alpha \leq [f]_{1-} + \sup\{d_Y(f(x), f(y)); x, y \in X\} < \infty.$$

Hiermit haben wir  $f \in BUC^\alpha(X, Y)$  gezeigt.

Sei nun  $f \in BUC^\alpha(X, Y)$ . Es folgt analog  $f \in BUC^\beta(X, Y)$  und dieselbe Argumentation wie in (d) zeigt,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in X, 0 < d_X(x, y) < \delta} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\beta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} [f]_\alpha \delta^{\alpha-\beta} = 0,$$

und daher  $f \in buc^\beta(X, Y)$ .

- (f) Seien  $x_0 \in X$ ,  $U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0) : [f]_{1-,U} < \infty$  und  $V \in \mathcal{U}_{\tau_{d_Y}}(f(x_0)) : [g]_{\alpha,V} < \infty$ . Wir setzen  $\tilde{U} := U \cap f^{-1}[V] \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0)$ . Dann gilt für  $x, y \in \tilde{U}$ ,

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq [g]_{\alpha,V} [d_Y(f(x), f(y))]^\alpha \leq [g]_{\alpha,V} [f]_{1-,U}^\alpha [d_X(x, y)]^\alpha.$$

$\Rightarrow$  Beh.

- (g) Seien  $x_0 \in X$ ,  $U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(x_0) : [f]_{1-,U} < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $y_0 := f(x_0)$ . Es existiert ein  $\tilde{\delta} > 0$  mit  $[g]_{\alpha, \mathbb{B}(y_0, \tilde{\delta})} < \varepsilon [f]_{1-,U}^{-\alpha}$ . Dann folgt wie in (f),

$$[g \circ f]_{\alpha, \mathbb{B}(x_0, \delta)} \leq [g]_{\alpha, \mathbb{B}(y_0, \tilde{\delta})} [f]_{1-,U}^\alpha < \varepsilon$$

für alle  $\delta > 0$  mit  $\mathbb{B}(x_0, \delta) \subseteq U \cap f^{-1}[\mathbb{B}(y_0, \tilde{\delta})]$ .

$\Rightarrow$  Beh.

□

**Bemerkung 3.2** *Im Allgemeinen gilt  $buc^\alpha(X, Y) \subsetneq c^\alpha(X, Y)$ .*

**Beweis:** Wir geben zwei Gegenbeispiele.

- (i) Sei  $(X, d)$  ein nichtbeschränkter metrischer Raum und  $A \subseteq X$  beschränkt. Die Abstandsfunktion  $d(\cdot, A)$  zu  $A$  ist Lipschitz-stetig  $\lceil |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$ .  $\rceil$ , also auch gleichmäßig stetig aber nicht beschränkt.  
 $\lceil$  Angenommen  $d(\cdot, A)$  ist beschränkt, etwa  $d(\cdot, A) < c$ . Seien  $x, y \in X$  und  $z, z' \in A$ .

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, z') + d(z', y) \leq d(x, z) + d(z', y) + \text{diam}(A).$$

Da dies für alle  $z, z' \in A$  richtig ist, gilt auch,

$$d(x, y) \leq d(x, A) + d(y, A) + \text{diam}(A) < 2c + \text{diam}(A).$$

$$\Rightarrow \text{diam}(X) \leq 2c + \text{diam}(A).$$

Dies ist ein Widerspruch !  $\rceil$

Mit Lemma 3.1(d) erhalten wir daher  $d(\cdot, A) \in c^\alpha(X) \setminus buc^\alpha(X)$ .

(ii) Wir betrachten nun die Funktion

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

Die Funktionen  $(x \mapsto \sin x)$  und  $(x \mapsto \frac{1}{x})$  sind stetig differenzierbar auf  $(0, 1]$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt daher, dass sie lokal Lipschitz-stetig sind (siehe [1], Bemerkung VII.8.12(b)). Offenbar ist  $f$  beschränkt aber nicht gleichmäßig stetig. Daher folgt mit Lemma 3.1(c), (d) und (g),  $f \in C^\alpha(X) \setminus buc^\alpha(X)$ .

□

**Lemma 3.3** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $f \in B(X, Y)$  sowie  $\alpha \in (0, 1)$ .

$$f \in BUC^\alpha(X, Y) \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists c > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \\ &\Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq c[d_X(x, y)]^\alpha \end{aligned}$$

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ ” Dies ist klar.

“ $\Leftarrow$ ” Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ .

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{[d_X(x, y)]^\alpha} \leq \begin{cases} c & \text{falls } d_X(x, y) < \delta \\ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{\delta^\alpha} & \text{falls } d_X(x, y) \geq \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f]_\alpha \leq c + \frac{1}{\delta^\alpha} \sup\{d_Y(f(x), f(y)); x, y \in X\} < \infty.$$

□

**Satz 3.4** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $(X, \tau_d)$  kompakt sowie  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt:  $C^\alpha(X, Y) = BUC^\alpha(X, Y)$ . D.h. lokal  $\alpha$ -Hölder-stetige Funktionen auf einem Kompaktum sind gleichmäßig  $\alpha$ -Hölder-stetig.

**Beweis:** Sei  $f \in C^\alpha(X, Y)$ . Angenommen

$$\forall c > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) > c[d_X(x, y)]^\alpha.$$

Dann finden wir Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n \in X^\mathbb{N}$  mit

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d_Y(f(x_n), f(y_n)) > n[d_X(x_n, y_n)]^\alpha, n \in \mathbb{N}^\times.$$

Weil  $X$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  von  $(x_n)_n$ . Etwa  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}$ . Wegen

$$d_X(\bar{x}, y_{n_k}) \leq d_X(\bar{x}, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq d_X(\bar{x}, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}, k \in \mathbb{N}^\times$$

konvergiert auch  $(y_{n_k})_k$  gegen  $\bar{x}$ . Daher folgt :

$$\begin{aligned} \forall U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(\bar{x}) \forall N \in \mathbb{N} \exists K \in \mathbb{N} : \\ x_{n_K}, y_{n_K} \in U \wedge d_Y(f(x_{n_K}), f(y_{n_K})) > N[d_X(x_{n_K}, y_{n_K})]^\alpha. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $f \in C^\alpha(X, Y)$ ! Aus Lemma 3.3 folgt nun die Behauptung. □

**Korollar 3.5** *Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt :  $C^\alpha(X, Y) \cap C_c(X, Y) \subseteq BUC^\alpha(X, Y)$ .*

**Beweis:** Sei  $f \in C^\alpha(X, Y) \cap C_c(X, Y)$ . Wir nehmen an  $f \notin BUC^\alpha(X, Y)$ . Dann finden wir wieder Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n \in X^\mathbb{N}$  mit

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d_Y(f(x_n), f(y_n)) > n[d_X(x_n, y_n)]^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

Aus  $d_Y(f(x_n), f(y_n)) > n[d_X(x_n, y_n)]^\alpha \geq 0$  folgt  $x_n \in \text{supp}(f) \vee y_n \in \text{supp}(f)$ . Daher finden wir eine Teilfolge von  $(x_n)_n$  oder  $(y_n)_n$  die ganz in  $\text{supp}(f)$  liegt. Der Rest verläuft analog zum Beweis von Satz 3.4. □

**Bemerkung 3.6** *Man sieht leicht, dass die Beweise von Satz 3.4 und Korollar 3.5 auch im Fall Lipschitz-stetiger Funktionen richtig bleibt. Insbesondere sind lokal Lipschitz-stetige Funktionen auf einem Kompaktum gleichmäßig Lipschitz-stetig.*

**Satz 3.7** *Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $(X, \tau_d)$  kompakt sowie  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt :  $c^\alpha(X, Y) = buc^\alpha(X, Y)$ .*

**Beweis:** Sei  $f \in c^\alpha(X, Y)$ . Es ist zu zeigen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon[d_X(x, y)]^\alpha.$$

Angenommen das Gegenteil sei wahr. D.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in X : d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) > \varepsilon[d_X(x, y)]^\alpha.$$

Dann finden wir Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n \in X^\mathbb{N}$  mit

$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d_Y(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon[d_X(x_n, y_n)]^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

Weil  $X$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  von  $(x_n)_n$ .  
Etwa  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}$ . Wegen

$$d_X(\bar{x}, y_{n_k}) \leq d_X(\bar{x}, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq d_X(\bar{x}, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}^\times$$

konvergiert auch  $(y_{n_k})_k$  gegen  $\bar{x}$ . Daher folgt :

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\tau_{d_X}}(\bar{x}) \exists K \in \mathbb{N} : x_{n_K}, y_{n_K} \in U \wedge d_Y(f(x_{n_K}), f(y_{n_K})) > \varepsilon [d_X(x_{n_K}, y_{n_K})]^\alpha.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $f \in c^\alpha(X, Y)$ !

□

**Korollar 3.8** *Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt :  $c^\alpha(X, Y) \cap C_c(X, Y) \subseteq buc^\alpha(X, Y)$ .*

**Beweis:** Analog zum Beweis von Satz 3.7 und Korollar 3.5 .

□

Seien nun  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $(E, \| \cdot \|)$  sei ein Banachraum und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann sind  $C^\alpha(X, E)$ ,  $BUC^\alpha(X, E)$ ,  $c^\alpha(X, E)$  und  $buc^\alpha(X, E)$  Vektorräume. Man nennt  $C^\alpha(X, E)$ ,  $BUC^\alpha(X, E)$  Hölderräume und  $c^\alpha(X, E)$ ,  $buc^\alpha(X, E)$  kleine Hölderräume. Wir definieren eine Norm auf  $BUC^\alpha(X, E)$  durch

$$\| \cdot \|_\alpha : BUC^\alpha(X, E) \rightarrow \mathbb{R}^+, f \mapsto \|f\|_\infty + [f]_\alpha,$$

wobei  $\| \cdot \|_\infty$  die Supremumsnorm bezeichnet.

**Lemma 3.9**  *$(BUC^\alpha(X, E), \| \cdot \|_\alpha)$  ist ein Banachraum.*

**Beweis:**

(i)  $[ \cdot ]_\alpha : BUC^\alpha(X, E) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist eine Seminorm.

Seien  $f, g \in BUC^\alpha(X, E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$[\lambda f]_\alpha = \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{\| \lambda f(x) - \lambda f(y) \|}{[d(x, y)]^\alpha} = \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{|\lambda| \| f(x) - f(y) \|}{[d(x, y)]^\alpha} = |\lambda| [f]_\alpha$$

$$\begin{aligned} [f + g]_\alpha &= \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{\| f(x) + g(x) - f(y) - g(y) \|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ &\leq \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{\| f(x) - f(y) \|}{[d(x, y)]^\alpha} + \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{\| g(x) - g(y) \|}{[d(x, y)]^\alpha} = [f]_\alpha + [g]_\alpha \end{aligned}$$

(ii)  $(BUC^\alpha(X, E), \| \cdot \|_\alpha)$  ist ein normierter Vektorraum.

Wegen  $0 = \|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha \Leftrightarrow f = 0$  folgt dies aus (i).

(iii)  $(BUC^\alpha(X, E), \|\cdot\|_\alpha)$  ist vollständig.

Sei  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $(BUC^\alpha(X, E), \|\cdot\|_\alpha)$ . Wegen  $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\alpha$  ist  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $(BUC(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ , also konvergent. Etwa  $f_n \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f$ . Angenommen  $f \notin BUC^\alpha(X, E)$ .  $\Rightarrow [f]_\alpha = \infty$ . Weil  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge ist, existiert ein  $c \geq 0$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : [f_n]_\alpha \leq c$ . Ferner existieren  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ , so dass  $\frac{\|f(x) - f(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} > 2c$ . Sei  $0 < \varepsilon < c[d(x, y)]^\alpha$  und  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon/2$ .

$$\begin{aligned} 2c &< \frac{\|f(x) - f(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ &\leq \frac{\|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{[d(x, y)]^\alpha} + \frac{\|f_N(x) - f_N(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ \Rightarrow c &< \frac{\|f_N(x) - f_N(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha}. \text{ Dies ist ein Widerspruch!} \end{aligned}$$

Daher gilt  $f \in BUC^\alpha(X, E)$ .

Bleibt noch zu zeigen  $f_n \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} f$ . Wir setzen  $y_n := [f - f_n]_\alpha$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$|y_n - y_m| = |[f - f_n]_\alpha - [f - f_m]_\alpha| \leq [f - f_n - (f - f_m)]_\alpha = [f_m - f_n]_\alpha$$

ist  $(y_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , also konvergent.  $\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Offenbar gilt  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Angenommen  $\lambda > 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $0 < \lambda - \varepsilon$ ,

$$\exists \tilde{M} \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \tilde{M} \Rightarrow [f - f_n]_\alpha > \lambda - \varepsilon/2,$$

$$\exists \hat{M} \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq \hat{M} \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\alpha < \varepsilon/2.$$

$$M := \max\{\tilde{M}, \hat{M}\}.$$

$$\Rightarrow \exists x, y \in X : 0 < \lambda - \varepsilon/2 < \frac{\|f(x) - f_M(x) - f(y) + f_M(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha}.$$

Es gilt für alle  $m \geq M$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\|f(x) - f_m(x) - f(y) + f_m(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ &= \frac{\|f(x) - f_M(x) + f_M(x) - f_m(x) + f_m(y) - f_M(y) + f_M(y) - f(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \\ &\geq \left| \frac{\|f(x) - f_M(x) + f_M(y) - f(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} - \frac{\|f_m(x) - f_M(x) + f_M(y) - f_m(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \right| \\ &> \lambda - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \lambda - \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei nun  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq M$  und  $\|f - f_m\|_\infty < \frac{1}{2}[d(x, y)]^\alpha(\lambda - \varepsilon)$ . Dann folgt:

$$\frac{\|f(x) - f_m(x) - f(y) + f_m(y)\|}{[d(x, y)]^\alpha} \leq \frac{2\|f - f_m\|_\infty}{[d(x, y)]^\alpha} < \lambda - \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch!

Daher haben wir  $\lambda = 0$ , was die Behauptung impliziert. □

**Korollar 3.10**  $buc^\alpha(X, E)$  ist ein abgeschlossener Untervektorraum von  $BUC^\alpha(X, E)$ , also selbst ein Banachraum.

**Beweis:** Man sieht leicht, dass  $buc^\alpha(X, E)$  ein Untervektorraum von  $BUC^\alpha(X, E)$  ist. Wir zeigen, dass er abgeschlossen ist. Sei  $f \in \overline{buc^\alpha(X, E)}^{\|\cdot\|_\alpha}$  und  $(f_n)_n \in buc^\alpha(X, E)^{\mathbb{N}} : f_n \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} f$ . Für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\|f - f_N\|_\alpha < \varepsilon/2$  und ein  $\delta > 0$  mit  $\sup_{x,y \in X, 0 < d_X(x,y) < \delta} \frac{\|f_N(x) - f_N(y)\|}{[d_X(x,y)]^\alpha} < \varepsilon/2$ . Daher erhalten wir :

$$\begin{aligned} & \sup_{x,y \in X, 0 < d_X(x,y) < \delta} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{[d_X(x,y)]^\alpha} \\ = & \sup_{x,y \in X, 0 < d_X(x,y) < \delta} \frac{\|f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)\|}{[d_X(x,y)]^\alpha} \\ \leq & \|f - f_N\|_\alpha + \sup_{x,y \in X, 0 < d_X(x,y) < \delta} \frac{\|f_N(x) - f_N(y)\|}{[d_X(x,y)]^\alpha} \\ < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ = & \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.11** Für  $0 < \beta < \alpha < 1$  gilt:

$$BUC^\alpha(X, E) \hookrightarrow BUC^\beta(X, E) \hookrightarrow BUC(X, E)$$

**Beweis:** Offensichtlich gilt  $BUC^\alpha(X, E) \hookrightarrow BUC(X, E)$  für alle  $\alpha \in (0, 1)$ . Mit Lemma 3.9 und 3.1(e) folgt die Behauptung aus Lemma 2.19. □

Nun wollen wir noch Produkte von Hölder-stetigen Funktionen betrachten.

**Lemma 3.12 (Elementare Eigenschaften II)**

- (a)  $f \in C^\alpha(X), g \in C^\alpha(X, E) \Rightarrow fg \in C^\alpha(X, E)$ .
- (b)  $f \in c^\alpha(X), g \in c^\alpha(X, E) \Rightarrow fg \in c^\alpha(X, E)$ .
- (c)  $f \in BUC^\alpha(X), g \in BUC^\alpha(X, E) \Rightarrow fg \in BUC^\alpha(X, E)$ .



(d)  $f \in \text{buc}^\alpha(X)$ ,  $g \in \text{buc}^\alpha(X, E) \Rightarrow fg \in \text{buc}^\alpha(X, E)$ .

**Beweis:** Wir beweisen exemplarisch Aussage (a). Seien  $x_0 \in X$ ,  $U_1 \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x_0) : [f]_{\alpha, U_1} < \infty$ ,  $U_2 \in \mathcal{U}_{\tau_d}(x_0) : [g]_{\alpha, U_2} < \infty$ . Wir setzen  $U := U_1 \cap U_2$  und können wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  o.B.d.A. annehmen, dass  $f|_U$  und  $g|_U$  beschränkt sind durch  $R := R(U) \geq 0$ .

[ Sonst betrachten wir  $\tilde{U} := U \cap f^{-1}[\mathbb{B}(f(x_0), R)] \cap g^{-1}[\mathbb{B}_{d_{\parallel}}(f(x_0), R)]$ .  
Dann gilt für  $x, y \in U$  mit  $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x)g(x) - f(y)g(y)\|}{[d(x,y)]^\alpha} &= \frac{\|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)\|}{[d(x,y)]^\alpha} \\ &\leq \frac{\|g(x)\| |f(x) - f(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} + \frac{|f(y)| \|g(x) - g(y)\|}{[d(x,y)]^\alpha} \\ &\leq R[f]_{\alpha, U} + R[g]_{\alpha, U}. \end{aligned}$$

Übergang zum Supremum zeigt

$$[fg]_{\alpha, U} \leq R[f]_{\alpha, U} + R[g]_{\alpha, U} < \infty.$$

□

Im Fall  $E = \mathbb{R}$  ist  $BUC^\alpha(X)$  eine Banachalgebra. Dies halten wir in einem Lemma fest.

**Lemma 3.13**  *$BUC^\alpha(X)$  ist mit punktweiser Multiplikation und Addition eine kommutative Banachalgebra mit Eins.*

**Beweis:**  $\mathbf{1} \in BUC^\alpha(X)$  und  $\|\mathbf{1}\|_\alpha = \|\mathbf{1}\|_\infty + [\mathbf{1}]_\alpha = \|\mathbf{1}\|_\infty = 1$

Seien nun  $f, g \in BUC^\alpha(X)$  und  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ .

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} &= \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} \\ &\leq \frac{|g(x)| |f(x) - f(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} + \frac{|f(y)| |g(x) - g(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} \\ &\leq \|g\|_\infty [f]_\alpha + \|f\|_\infty [g]_\alpha. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Supremum liefert

$$[fg]_\alpha = \|g\|_\infty [f]_\alpha + \|f\|_\infty [g]_\alpha.$$

Somit haben wir  $fg \in BUC^\alpha(X)$  und

$$\begin{aligned} \|fg\|_\alpha &= \|fg\|_\infty + [fg]_\alpha \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|g\|_\infty [f]_\alpha + \|f\|_\infty [g]_\alpha \\ &\leq (\|f\|_\infty + [f]_\alpha)(\|g\|_\infty + [g]_\alpha) \\ &= \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha. \end{aligned}$$

Der Rest ist klar. □

## 3.2 Kleine Hölderräume - Lokale Theorie

Seien  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{N}^m$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann setzen wir:

$$BUC^k(\Omega) := \{f \in BUC(\Omega); \partial^j f \in BUC(\Omega), |j| \leq k\}$$

und

$$\| \cdot \|_{k,\infty} : BUC^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+, f \mapsto \max_{|j| \leq k} \|\partial^j f\|_\infty$$

$(BUC^k(\Omega), \| \cdot \|_{k,\infty})$  ist ein Banachraum, vgl. [1]. Für die Anwendung in den partiellen Differentialgleichungen betrachten wir außerdem folgende Räume:

$$\begin{aligned} BUC^{k+\alpha}(\Omega) &:= \{f \in BUC^k(\Omega); \partial^j f \in BUC^\alpha(\Omega), |j| = k\} \\ buc^{k+\alpha}(\Omega) &:= \{f \in BUC^k(\Omega); \partial^j f \in buc^\alpha(\Omega), |j| = k\} \\ C^{k+\alpha}(\Omega) &:= \{f \in C^k(\Omega); \partial^j f \in C^\alpha(\Omega), |j| = k\} \\ c^{k+\alpha}(\Omega) &:= \{f \in C^k(\Omega); \partial^j f \in c^\alpha(\Omega), |j| = k\} \end{aligned}$$

Im Fall  $k = 0$  stimmen diese Definitionen mit denen des vorherigen Abschnitts überein.

Für  $f \in BUC^{k+\alpha}(\Omega)$  setzen wir,

$$\|f\|_{k+\alpha} := \|f\|_{k,\infty} + \max_{|j|=k} [\partial^j f]_\alpha.$$

**Lemma 3.14**  $(BUC^{k+\alpha}(\Omega), \| \cdot \|_{k+\alpha})$  ist ein Banachraum.

**Beweis:** Es ist leicht zu sehen, dass  $(BUC^{k+\alpha}(\Omega), \| \cdot \|_{k+\alpha})$  ein normierter Vektorraum ist. Deswegen zeigen wir nur die Vollständigkeit. Sei  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $(BUC^{k+\alpha}(\Omega), \| \cdot \|_{k+\alpha})$ , dann ist  $(f_n)_n$  auch eine Cauchyfolge in  $(BUC^k(\Omega), \| \cdot \|_{k,\infty})$ . Etwa  $f_n \rightarrow_{\| \cdot \|_{k,\infty}} f$ . Sei  $j \in \mathbb{N}^m$  mit  $|j| = k$ . Dann ist  $(\partial^j f_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $(BUC^\alpha(\Omega), \| \cdot \|_\alpha)$ . Etwa  $\partial^j f_n \rightarrow_{\| \cdot \|_\alpha} g$ . Wegen  $\partial^j f_n \rightarrow_{\| \cdot \|_\infty} \partial^j f$  folgt aus der Eindeutigkeit der Limiten in  $(BUC(\Omega), \| \cdot \|_\infty)$ ,  $\partial^j f = g \in BUC^\alpha(\Omega)$ . Daher haben wir  $f \in BUC^{k+\alpha}(\Omega)$  und  $f_n \rightarrow_{\| \cdot \|_{k+\alpha}} f$ . □

**Korollar 3.15**  $buc^{k+\alpha}(\Omega)$  ist ein abgeschlossener Untervektorraum von  $BUC^{k+\alpha}(\Omega)$ , also selbst ein Banachraum.

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.14 und der Tatsache, dass  $buc^\alpha(\Omega)$  abgeschlossen ist in  $BUC^\alpha(\Omega)$  (Korollar 3.10).  $\square$

Nun wollen wir speziell Abbildungen von  $\mathbb{R}^m$  nach  $\mathbb{R}$  betrachten.

**Lemma 3.16** *Für  $0 < \alpha < 1$  gilt:*

$$BUC^1(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow BUC^\alpha(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow BUC(\mathbb{R}^m)$$

**Beweis:** Offenbar gilt  $BUC^1(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow BUC(\mathbb{R}^m)$ . Lemma 3.11 zeigt  $BUC^\alpha(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow BUC(\mathbb{R}^m)$ . Für  $f \in BUC^1(\mathbb{R}^m)$  folgt aus dem Mittelwertsatz, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Daher folgt die Behauptung aus Lemma 3.1 (e) sowie Lemma 2.19.  $\square$

Als nächstes wollen wir einen Satz über die Charakterisierung der kleinen Hölderräume auf dem  $\mathbb{R}^m$  beweisen. Dafür geben wir kurz einige Eigenschaften der Faltung an, die in dem Beweis benutzt werden. Gelten

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \check{\varphi} = \varphi, \quad \varphi \geq 0, \quad \text{supp}(\varphi) \subseteq \bar{\mathbb{B}}^n, \quad \int \varphi dx = 1,$$

und sei

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m} \varphi(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0,$$

so heißt  $\{\varphi_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$  glättender Kern (mollifier).

**Lemma 3.17 (Einige Eigenschaften der Faltung)**

- (a) Sei  $(f, g) \in L_\infty(\mathbb{R}^m) \times L_1(\mathbb{R}^m)$ , so gehört  $f * g$  zu  $BUC(\mathbb{R}^m)$ .
- (b) Sei  $(f, g) \in C_c^k(\mathbb{R}^m) \times L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$  für  $k \in \mathbb{N} \cup \infty$ , so gehört  $f * g$  zu  $C^k(\mathbb{R}^m)$  und es gilt:  $\partial^j (f * g) = (\partial^j f) * g$ ,  $|j| \leq k$ .
- (c) Sei  $\{\varphi_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$  ein glättender Kern,  $f \in BUC(\mathbb{R}^m)$ ,  $f_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f$ . Dann gilt:  $f_\varepsilon \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Beweis:** Siehe [1], Kapitel X.7.  $\square$

**Korollar 3.18**

- (a) Sei  $f \in BUC(\mathbb{R}^m)$  und  $\{\varphi_\varepsilon; \varepsilon > 0\}$  ein glättender Kern. Dann gilt:  
 $f_\varepsilon \in BUC^\infty(\mathbb{R}^m)$  und  $f_\varepsilon \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (b)  $BUC^\infty(\mathbb{R}^m)$  ist dicht in  $(BUC(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Beweis:**

- (a) Gemäß 3.17(b) gilt  $f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  und

$$\partial^j(\varphi_\varepsilon * f) = (\partial^j \varphi_\varepsilon) * f, \quad j \in \mathbb{N}^m.$$

Wegen  $\partial^j \varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^m) \subseteq L_1(\mathbb{R}^m)$  und  $f \in BUC(\mathbb{R}^m) \subseteq L_\infty(\mathbb{R}^m)$ , folgt gemäß 3.17(a)

$$\partial^j(\varphi_\varepsilon * f) = (\partial^j \varphi_\varepsilon) * f \in BUC(\mathbb{R}^m).$$

Damit ergibt sich der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil ist mit 3.17(c) klar.

- (b) Dies ist eine unmittelbare Konsequenz von (a).

□

**Satz 3.19** Es sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt:

$$buc^\alpha(\mathbb{R}^m) = \overline{BUC^\infty(\mathbb{R}^m)}^{\|\cdot\|_\alpha}$$

**Beweis:** “ $\supseteq$ ”

Aus dem Mittelwertsatz und Lemma 3.1(e) folgt,

$$BUC^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq BUC^{1-}(\mathbb{R}^m) \subseteq buc^\alpha(\mathbb{R}^m).$$

Weil  $buc^\alpha(\mathbb{R}^m)$  nach Korollar 3.10 ein abgeschlossener Untervektorraum von  $BUC^\alpha(\mathbb{R}^m)$  ist, folgt

$$\overline{BUC^\infty(\mathbb{R}^m)}^{\|\cdot\|_\alpha} \subseteq buc^\alpha(\mathbb{R}^m).$$

“ $\subseteq$ ”

Sei nun  $f \in buc^\alpha(\mathbb{R}^m)$ . Aus Korollar 3.18(a) folgt  $f_\varepsilon \in BUC^\infty(\mathbb{R}^m)$  und

$f_\varepsilon \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Es bleibt daher noch zu zeigen  $[f_\varepsilon - f]_\alpha \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Sei  $\delta > 0$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$\exists s > 0 : \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^m, 0 < \|\xi - \eta\| < s} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{\|\xi - \eta\|^\alpha} < \delta/2,$$

sowie

$$\exists t > 0 \forall 0 < \varepsilon < t : \|f - f_\varepsilon\|_\infty < s^\alpha \delta/2.$$

Sei nun  $0 < \varepsilon < t$  und  $x, y \in \mathbb{R}^m$ .

(i) 1. Fall,  $\|x - y\| \geq s$ .

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f_\varepsilon(x) - (f(y) - f_\varepsilon(y))|}{\|x - y\|^\alpha} &\leq \frac{|f(x) - f_\varepsilon(x)|}{\|x - y\|^\alpha} + \frac{|f(y) - f_\varepsilon(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \\ &\leq 2 \frac{\|f - f_\varepsilon\|_\infty}{s^\alpha} < \delta. \end{aligned}$$

(ii) 2. Fall,  $\|x - y\| < s$ .

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x) - f_\varepsilon(x) - (f(y) - f_\varepsilon(y))|}{\|x - y\|^\alpha} \\ &\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} + \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{\|x - y\|^\alpha} \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} + \left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon^{-m} \varphi(z/\varepsilon) (f(x-z) - f(y-z))}{\|x - y\|^\alpha} dz \right| \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} + \left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(z) [f(x-\varepsilon z) - f(y-\varepsilon z)]}{\|(x-\varepsilon z) - (y-\varepsilon z)\|^\alpha} dz \right| \\ &\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} + \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^m, 0 < \|\xi - \eta\| < s} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{\|\xi - \eta\|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) dz \\ &\leq 2 \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^m, 0 < \|\xi - \eta\| < s} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{\|\xi - \eta\|^\alpha} \\ &< \delta/2 + \delta/2 = \delta. \end{aligned}$$

Mit (i) und (ii) folgt  $[f_\varepsilon - f]_\alpha < \delta$  für alle  $0 < \varepsilon < t$ . Weil  $\delta > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

**Korollar 3.20** *Es sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt:*

$$buc^\alpha(\mathbb{R}^m) = \overline{BUC^1(\mathbb{R}^m)}^{\|\cdot\|_\alpha}$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 3.19. □

Die kleinen Hölderräume sind zwar wohldefiniert, doch es erhebt sich die Frage, ob sie sich überhaupt von den großen Hölderräumen unterscheiden. Mit anderen Worten, ist  $BUC^\infty(\mathbb{R}^m)$  dicht in  $(BUC^\alpha(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\alpha)$ ? Das folgende Korollar zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

**Korollar 3.21** Sei  $f_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \begin{cases} \min(x_1^\alpha, 1) & , x_1 > 0 \\ 0 & , x_1 \leq 0 \end{cases}$   
für  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt  $f_\alpha \in BUC^\alpha(\mathbb{R}^m) \setminus buc^\alpha(\mathbb{R}^m)$ .

**Beweis:** Wegen

$$\frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{\|x - y\|_\infty^\alpha} \leq \frac{|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(y_1)|}{|x_1 - y_1|^\alpha}$$

für  $x, y \in \mathbb{R}^m$  genügt es den Fall  $m = 1$ , d.h.  $f_\alpha$  als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  zu betrachten.

Offenbar ist  $f_\alpha$  beschränkt und es gilt  $\|f_\alpha\|_\infty = 1$ . Durch Fallunterscheidungen zeigen wir nun,

$$\frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq y$ , woraus die Behauptung folgt.

(i) 1. Fall,  $0 < x < y \leq 1$  mit  $y \geq 3x$ .

$$y \geq 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow y - 2x \geq \frac{1}{2}(y - x) \Leftrightarrow \frac{y - 2x}{y - x} \geq \frac{1}{2}.$$

Sei  $t \in \mathbb{R}$ .

$$(1 - t)x + ty = y - x \Leftrightarrow -tx + ty = y - 2x \Leftrightarrow t = \frac{y - 2x}{y - x}.$$

Nach Wahl von  $x$  und  $y$  haben wir  $t \in [\frac{1}{2}, 1)$ . Die Potenzfunktion ist für  $\alpha \in (0, 1)$  (strikt) konkav. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} (y - x)^\alpha &= \left( \left(1 - \frac{y-2x}{y-x}\right)x + \frac{y-2x}{y-x}y \right)^\alpha \\ &\geq \left(1 - \frac{y-2x}{y-x}\right)x^\alpha + \frac{y-2x}{y-x}y^\alpha \\ &\geq \frac{y-2x}{y-x}y^\alpha - \frac{y-2x}{y-x}x^\alpha \\ &\geq \frac{1}{2}(y^\alpha - x^\alpha) \\ \Rightarrow \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{y^\alpha - x^\alpha}{(y - x)^\alpha} \leq 2. \end{aligned}$$

(ii) 2. Fall,  $0 < x < y \leq 1$  mit  $y < 3x$ .

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $\frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} = \frac{1}{\alpha} \xi^{\alpha-1}$ .

Somit gilt :

$$\begin{aligned} \frac{y^\alpha - x^\alpha}{(y-x)^\alpha} &= \frac{y^\alpha - x^\alpha}{y-x} (y-x)^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \xi^{\alpha-1} (y-x)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{(y-x)^{1-\alpha}}{x^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{y}{x} - 1\right)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \\ \Rightarrow \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \frac{y^\alpha - x^\alpha}{(y-x)^\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}. \end{aligned}$$

(iii) 3. Fall,  $x \leq 0 < y$ .

$$\Rightarrow \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{f_\alpha(y)}{(y-x)^\alpha} \leq 1.$$

(iv) 4. Fall,  $0 < x < 1 \leq y$ .

$$\Rightarrow \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{1 - x^\alpha}{(1-x)^\alpha} \leq \frac{2}{\alpha}.$$

Die Fälle  $x, y \leq 0$  und  $x, y \geq 1$  sind klar. Damit haben wir  $f_\alpha \in BUC^\alpha(\mathbb{R})$ . Sei  $(x_n)_n \in (0, 1]^\mathbb{N}$  mit  $x_n \rightarrow 0$ . Es ist,

$$\frac{|f_\alpha(x_n) - f_\alpha(0)|}{|x_n - 0|^\alpha} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher folgt  $f_\alpha \notin buc^\alpha(\mathbb{R})$ . □

Schließlich wollen wir noch die Räume  $BUC(\mathbb{R}^m)$ ,  $BUC^1(\mathbb{R}^m)$ ,  $BUC^\alpha(\mathbb{R}^m)$  und  $buc^\alpha(\mathbb{R}^m)$  auf Separabilität untersuchen.

**Lemma 3.22** ( $BUC(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\infty}$ ) ist nicht separabel.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass  $(BUC(\mathbb{R}), \tau_{d_\infty})$  nicht separabel ist.

[ Für  $m \geq 2$  setzen wir  $\Phi : BUC(\mathbb{R}) \rightarrow BUC(\mathbb{R}^m)$ ,  $u \mapsto u \circ \pi_1$ .  $\Phi$  ist eine Isometrie, also insbesondere ein Homöomorphismus auf sein Bild. Angenommen  $(BUC(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\infty})$  ist separabel.

$\Rightarrow (BUC(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\infty})$  ist  $A_2$ -Raum  $\Rightarrow (\text{im}(\Phi), \tau_{d_\infty} |_{\text{im}(\Phi)})$  ist  $A_2$ -Raum

$\Rightarrow (BUC(\mathbb{R}), \tau_{d_\infty})$  ist  $A_2$ -Raum  $\Rightarrow (BUC(\mathbb{R}), \tau_{d_\infty})$  ist separabel. ]

Sei nun  $\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$  eine Aufzählung einer abzählbar unendlichen Teilmenge  $A$  von  $BUC(\mathbb{R})$  und  $m_n := \max_{x \in [n, n+1]} |\alpha_n(x)|$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x < 0 \text{ oder } \exists n \in \mathbb{N} : x \in [n, n+1), m_n > 1 \\ 4(x-n) & , \text{ für } \exists n \in \mathbb{N} : x \in [n, n + \frac{1}{2}), m_n \leq 1 \\ 2 - 4(x - n - \frac{1}{2}) & , \text{ für } \exists n \in \mathbb{N} : x \in [n + \frac{1}{2}, n+1), m_n \leq 1 \end{cases}$$

$f$  ist gleichmäßig stetig und beschränkt auf  $\mathbb{R}$  [ $f[\mathbb{R}] \subseteq [0, 2]$ ] und  $f \notin \overline{A}^{\tau_{d_\infty}}$  wegen  $\mathbb{B}_{d_\infty}(f, 1) \cap A = \emptyset$ . Denn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(f, \alpha_n) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \alpha_n(x)| \geq \sup_{x \in [n, n+1]} |f(x) - \alpha_n(x)| \\ &\geq \begin{cases} |f(n + \frac{1}{2}) - \alpha_n(n + \frac{1}{2})| = |2 - \alpha_n(n + \frac{1}{2})| \geq 2 - m_n & , \text{ für } m_n \leq 1 \\ \sup_{x \in [n, n+1]} |\alpha_n(x)| = m_n & , \text{ für } m_n > 1 \end{cases} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

□

### Korollar 3.23

- (a)  $(BUC^1(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\infty})$  ist nicht separabel.
- (b)  $(buc^\alpha(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\alpha})$  ist nicht separabel.
- (c)  $(BUC^\alpha(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\alpha})$  ist nicht separabel.

**Beweis:** (i) Aus Korollar 3.18 (b) folgt  $BUC^1(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{d} BUC(\mathbb{R}^m)$ . Angenommen  $(BUC^1(\mathbb{R}^m), \tau_{d_{1,\infty}})$  ist separabel. Dann finden wir eine abzählbar dichte Teilmenge  $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Bezeichne  $\iota$  die Einbettung von  $BUC^1(\mathbb{R}^m)$  in  $BUC(\mathbb{R}^m)$ .

$$\begin{aligned} \iota[BUC^1(\mathbb{R}^m)] &= \iota[\overline{\{u_n; n \in \mathbb{N}\}^{\tau_{d_{1,\infty}}}}] \subseteq \overline{\iota[\{u_n; n \in \mathbb{N}\}]^{\tau_{d_\infty}}} \subseteq BUC(\mathbb{R}^m) \\ \Rightarrow BUC(\mathbb{R}^m) &= \overline{\iota[BUC^1(\mathbb{R}^m)]^{\tau_{d_\infty}}} \subseteq \overline{\{\iota(u_n); n \in \mathbb{N}\}^{\tau_{d_\infty}}} \subseteq BUC(\mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Also  $\overline{\{\iota(u_n); n \in \mathbb{N}\}^{\tau_{d_\infty}}} = BUC(\mathbb{R}^m)$ . Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 3.22!

Wegen  $BUC^1(\mathbb{R}^m) \subseteq buc^\alpha(\mathbb{R}^m) \subseteq BUC^\alpha(\mathbb{R}^m)$  gilt auch  $buc^\alpha(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{d} BUC(\mathbb{R}^m)$  bzw.  $BUC^\alpha(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{d} BUC(\mathbb{R}^m)$ . Daher zeigt man (b) und (c) analog.

□

Es lässt sich auch direkt zeigen, dass  $(BUC^\alpha(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\alpha})$  nicht separabel ist.



**Bemerkung 3.24** Für  $\alpha \in (0, 1)$  ist  $(BUC^\alpha(\mathbb{R}^m), \tau_{d_\alpha})$  nicht separabel.

**Beweis:** Für  $a \in (0, 1)$  definieren wir  $f_{a,\alpha} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  durch :

$$x \mapsto \begin{cases} \min((x_1 - a)^\alpha, 1) & , x_1 > a \\ 0 & , x_1 \leq a \end{cases}$$

Korollar 3.21 zeigt  $f_{a,\alpha} \in BUC^\alpha(\mathbb{R}^m)$ . Bezeichne  $e_1$  den ersten Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^m$ , dann gilt für  $a, b \in (0, 1)$  mit  $a < b$  :

$$\begin{aligned} [f_{a,\alpha} - f_{b,\alpha}]_\alpha &\geq \frac{|(f_a(be_1) - f_b(be_1)) - (f_a(ae_1) - f_b(ae_1))|}{|b-a|^\alpha} \\ &= \frac{(b-a)^\alpha}{|b-a|^\alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da die Menge  $\{f_{a,\alpha} ; a \in (0, 1)\}$  überabzählbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.3 Kleine Hölderräume - Globale Theorie

Sei in diesem Abschnitt stets  $(M, g)$  eine kompakte, zusammenhängende, glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Ferner soll  $M$  immer mit der Metrik  $d_g$  versehen sein. Schließlich schreiben wir im Folgenden  $|\cdot|$  für die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^m$ .

**Lemma 3.25** Für  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $p$ , ein  $\varphi \in \text{Diff}(U, \varphi[U])$  sowie Konstanten  $C, c > 0$ , so dass:

$$\forall q, \tilde{q} \in U : c|\varphi(q) - \varphi(\tilde{q})| \leq d_g(q, \tilde{q}) \leq C|\varphi(q) - \varphi(\tilde{q})|.$$

**Beweis:** Sei  $(U, \varphi)$  eine Normal-Karte von  $M$  um  $p$ . Nach dem Satz von Whitehead (Satz 2.12) finden wir einen geodätischen Ball  $B(p, \varepsilon)$  mit  $\overline{B(p, \varepsilon)} \subseteq U$  und  $B(p, \varepsilon)$  ist geodätisch konvex. Aus Lemma 2.13 folgt:

$$\exists c, C > 0 \forall x \in \varepsilon \bar{\mathbb{B}}^m \forall V \in T_x \mathbb{R}^m : c|V|_\eta \leq |V|_g \leq C|V|_\eta.$$

Es gilt insbesondere für jede stückweise glatte Kurve  $\Gamma \subseteq \varepsilon \bar{\mathbb{B}}^m$ ,

$$cL_\eta(\Gamma) \leq L_g(\Gamma) \leq CL_\eta(\Gamma).$$

Seien nun  $x, y \in \varepsilon \bar{\mathbb{B}}^m$ . Übergang zum Infimum ergibt:

(i)

$$\begin{aligned}
c|x - y| &= c \inf\{L_\eta(\Gamma); \Gamma \subseteq \varepsilon\mathbb{B}^m \text{ stückw. } C^\infty\text{-Kurve, } A_\Gamma = x, E_\Gamma = y\} \\
&\leq \inf\{L_g(\Gamma); \Gamma \subseteq \varepsilon\mathbb{B}^m \text{ stückw. } C^\infty\text{-Kurve, } A_\Gamma = x, E_\Gamma = y\} \\
&= d_g(x, y)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
d_g(x, y) &= \inf\{L_g(\Gamma); \Gamma \subseteq \varepsilon\mathbb{B}^m \text{ stückw. } C^\infty\text{-Kurve, } A_\Gamma = x, E_\Gamma = y\} \\
&\leq C \inf\{L_\eta(\Gamma); \Gamma \subseteq \varepsilon\mathbb{B}^m \text{ stückw. } C^\infty\text{-Kurve, } A_\Gamma = x, E_\Gamma = y\} \\
&= C|x - y|
\end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung  $V := B(p, \varepsilon)$ .  $g|_V$  induziert eine Metrik  $d_{g|_V}$  auf  $V$ . Wir erhalten,

$$\forall q, \tilde{q} \in V : c|\varphi(q) - \varphi(\tilde{q})| \leq d_{g|_V}(q, \tilde{q}) \leq C|\varphi(q) - \varphi(\tilde{q})|.$$

Aus der Tatsache, dass  $V$  geodätisch konvex ist, folgt  $d_{g|_V} = d_g|_V$  und damit die Behauptung.

[  $V$  ist geodätisch konvex, d.h. für alle  $q, \tilde{q} \in V$  existiert eine eindeutige, minimierende geodätische  $\Gamma_{geo} \subseteq V$  mit  $A_{\Gamma_{geo}} = q$  und  $E_{\Gamma_{geo}} = \tilde{q}$  und somit  $d_{g|_V}(q, \tilde{q}) = L(\Gamma_{geo}) = d_g(q, \tilde{q})$ . ]

□

Sei  $f$  eine Abbildung von  $M$  nach  $\mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Wir sagen  $f$  gehört zur Klasse  $C^{k+\alpha}(M)$  [  $c^{k+\alpha}(M)$  ], wenn für alle  $p \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $p$  existiert mit  $f \circ \varphi^{-1} \in C^{k+\alpha}(\varphi[U])$  [  $c^{k+\alpha}(\varphi[U])$  ].

### Bemerkung 3.26

(a) Sei  $f \in C^{k+\alpha}(M)$  [  $c^{k+\alpha}(M)$  ]. Dann gilt für **jede** Karte  $(V, \psi)$  von  $M$ ,  $f \circ \psi^{-1} \in C^{k+\alpha}(\psi[U])$  [  $c^{k+\alpha}(\psi[U])$  ].

(b) Für  $k = 0$  stimmt die Definition von  $C^{k+\alpha}(M)$  [  $c^{k+\alpha}(M)$  ] mit der ursprünglichen Definition von  $C^\alpha(M)$  [  $c^\alpha(M)$  ] im Sinne von Abschnitt 3.1 (bzgl. des metrischen Raums  $(M, d_g)$ ) überein.

### Beweis:

(a) Sei  $f \in C^{k+\alpha}(M)$ ,  $(V, \psi)$  Karte von  $M$  und  $x_0 \in \psi[V]$ . Wir setzen  $p_0 := \psi^{-1}(x_0)$ . Nach Voraussetzung existiert eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $p_0$  mit  $f \circ \varphi^{-1} \in C^{k+\alpha}(M)$ . Offenbar gilt  $f \circ \psi \in C^k(\psi[U \cap V])$ . Wegen

$$(f \circ \psi^{-1})(x) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})(x), \quad x \in \psi[U \cap V],$$

folgt für  $j \in \mathbb{N}^m$  mit  $|j| = k$  aus der Kettenregel,

$$\partial^j (f \circ \psi^{-1})(x) = \partial^j (f \circ \varphi^{-1}) \circ \partial^j (\varphi \circ \psi^{-1})(x), \quad x \in \psi[U \cap V].$$

Nach Definition haben wir  $\partial^j (f \circ \varphi^{-1}) \in C^\alpha(\varphi[U \cap V])$  und aus dem Mittelwertsatz ergibt sich  $\partial^j (\varphi \circ \psi^{-1}) \in C^{1-\alpha}(\psi[U \cap V])$ . Nun folgt die Behauptung aus Lemma 3.1(f). Die Aussage für  $f \in C^{k+\alpha}(M)$  zeigt man mit Lemma 3.1(g) analog.

(b) Dies folgt aus (a) und Lemma 3.25.

□

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  und  $V := \varphi[U]$ . Damit im Folgenden unsere Notation etwas ökonomischer wird, erklären wir die Vorwärtstransformation (push forward) mittels  $\varphi$  durch,

$$\varphi_* : \mathbb{R}^U \rightarrow \mathbb{R}^V, \quad a \mapsto \varphi_* a := a \circ \varphi^{-1}.$$

Unser nächstes Ziel ist es, eine Norm auf den Räumen  $C^{k+\alpha}(M)$  zu definieren. Dabei stellt es sich als sinnvoll heraus, zunächst die Räume  $C^k(M)$  zu betrachten. Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$  ein endlicher Atlas von  $M$  und  $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  eine der Überdeckung  $\{U_1, \dots, U_n\}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Man nennt  $\{(U_l, \varphi_l, \pi_l); l \in \{1, \dots, n\}\}$  ein Lokalisierungssystem für  $M$ .

Für  $f \in C^k(M)$  setzen wir,

$$\|f\|_k := \max_{1 \leq l \leq n} \|\varphi_{l*}(\pi_l f)\|_{k, \infty} = \max_{1 \leq l \leq n} \max_{|j| \leq k} \|\partial^j (\varphi_{l*}(\pi_l f))\|_\infty.$$

**Bemerkung 3.27** Für  $k = 0$  ist die Norm  $\|\cdot\|_0$  äquivalent zur Supremums-Norm  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $C(M)$ .

**Beweis:** Sei  $f \in C(M)$ .

$$\|f\|_0 = \max_{1 \leq l \leq n} \|(\varphi_{l*}(\pi_l f))\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|\sum_{l=1}^n \pi_l f\|_\infty \leq \sum_{l=1}^n \|\pi_l f\|_\infty = \sum_{l=1}^n \|\varphi_{l*}(\pi_l f)\|_\infty \leq n \|f\|_0.$$

□

**Lemma 3.28**  $(C^k(M), \|\cdot\|_k)$  ist ein Banachraum.

**Beweis:** Man sieht leicht, dass  $\|\cdot\|_k$  eine Norm ist. Sei nun  $(f_m)_m$  eine Cauchyfolge in  $(C^k(M), \|\cdot\|_k)$ . Mit Bemerkung 3.27 folgt, dass  $(f_m)_m$  auch eine Cauchyfolge in  $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$  ist. Etwa  $f_m \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f$ . Außerdem ist für alle  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(\varphi_{l*}(\pi_l f_m))_m$  eine Cauchyfolge in  $(BUC^k(\varphi[U_l]), \|\cdot\|_{k,\infty})$ . Etwa  $\varphi_{l*}(\pi_l f_m) \rightarrow_{\|\cdot\|_{k,\infty}} g_l$ , für  $m \rightarrow \infty$ . Insbesondere  $\varphi_{l*}(\pi_l f_m) \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} g_l$ , für  $m \rightarrow \infty$ . Wegen

$$\|\varphi_{l*}(\pi_l f) - \varphi_{l*}(\pi_l f_m)\|_\infty = \|\pi_l(f - f_m)\|_\infty \leq \|f - f_m\|_\infty,$$

folgt aus der Eindeutigkeit der Limiten in  $(BUC(\varphi[U_l]), \|\cdot\|_\infty)$ :

$$\varphi_{l*}(\pi_l f) = g_l \in BUC^k(\varphi[U_l]),$$

und daher  $\pi_l f \in C^k(M)$ . Also insgesamt,

$$f = \sum_{l=1}^n \pi_l f \in C^k(M) \wedge f_m \rightarrow_{\|\cdot\|_k} f.$$

Als letzter Schritt bleibt noch zu zeigen, dass die Topologie auf  $C^k(M)$  unabhängig von der Wahl des endlichen Atlas ist. Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  zwei endliche Atlanten von  $M$ , die denselben maximalen, glatten Atlas bestimmen. Bezeichne  $\|\cdot\|_{k,\mathcal{A}}$  bzw.  $\|\cdot\|_{k,\mathcal{A}'}$  die Norm auf  $C^k(M)$  bezüglich  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{A}'$ . Dann sind diese Normen wegen  $(C^k(M), \|\cdot\|_{k,\mathcal{A}}) \hookrightarrow (C(M), \|\cdot\|_\infty)$  und  $(C^k(M), \|\cdot\|_{k,\mathcal{A}'}) \hookrightarrow (C(M), \|\cdot\|_\infty)$  gemäß Lemma 2.19 äquivalent.  $\square$

Nun kommen wir zur Norm auf  $C^{k+\alpha}(M)$ . Wir definieren für  $f \in C^{k+\alpha}(M)$ :

$$\|f\|_{k+\alpha} := \max_{1 \leq l \leq n} \|(\varphi_{l*}(\pi_l f))\|_{k+\alpha} = \max_{1 \leq l \leq n} (\|(\varphi_{l*}(\pi_l f))\|_{k,\infty} + \max_{|j|=k} [\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f))]_\alpha).$$

**Bemerkung 3.29**  $\|\cdot\|_{k+\alpha}$  ist wohldefiniert.

**Beweis:**

$$\varphi_{l*}(\pi_l f) \in C^k(\varphi_l[U_l]) \cap C_c(\varphi_l[U_l]) \subseteq BUC^k(\varphi_l[U_l]).$$

Sei nun  $j \in \mathbb{N}^m$  mit  $|j| = k$ . Dann gilt,

$$\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f)) = \sum_{s \leq j} \binom{j}{s} \partial^j(\varphi_{l*}\pi_l) \partial^{j-s}(\varphi_{l*}f) \in BUC^\alpha(\varphi_l[U_l])$$

gemäß Lemma 3.12(a) und Korollar 3.5. Daher ergibt sich,

$$\varphi_{l*}(\pi_l f) \in BUC^{k+\alpha}(\varphi_l[U_l]),$$

was zeigt, dass  $\|\cdot\|_{k+\alpha}$  wohldefiniert ist. □

**Lemma 3.30**  $(C^{k+\alpha}(M), \|\cdot\|_{k+\alpha})$  ist ein Banachraum.

**Beweis:** Man sieht wieder leicht, dass  $\|\cdot\|_{k+\alpha}$  eine Norm ist. Sei  $(f_m)_m$  eine Cauchyfolge in  $(C^{k+\alpha}(M), \|\cdot\|_{k+\alpha})$ . Dann ist  $(f_m)_m$  auch eine Cauchyfolge in  $(C^k(M), \|\cdot\|_k)$ . Etwa  $f_m \rightarrow_{\|\cdot\|_k} f$ . Sei  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \mathbb{N}^m$  mit  $|j| = k$ . Dann gilt,

$$\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f_m)) \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} \partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f)), \quad m \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist  $(\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f)))_m$  eine Cauchyfolge in  $(BUC^\alpha(\varphi_l[U_l]), \|\cdot\|_\alpha)$ . Etwa

$$\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f_m)) \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} g, \quad m \rightarrow \infty.$$

Aus der Eindeutigkeit der Limiten in  $(BUC(\varphi_l[U_l]), \|\cdot\|_\infty)$  folgt,

$$\partial^j(\varphi_{l*}(\pi_l f)) = g \in BUC^\alpha(\varphi_l[U_l]).$$

Da dies für alle  $l \in \{1, \dots, n\}$  und alle  $j \in \mathbb{N}^m$  mit  $|j| = k$  richtig ist, haben wir  $f \in C^{k+\alpha}(M)$  und  $f_n \rightarrow_{\|\cdot\|_{k+\alpha}} f$ . Ein analoges Argument wie in dem Beweis von Lemma 3.28 zeigt, dass die Wahl verschiedener endlicher Atlanten, die denselben maximalen, glatten Atlas bestimmen, äquivalente Normen auf  $C^{k+\alpha}(M)$  ergibt. □

Wir haben nun zwei verschiedene Normen auf  $C^\alpha(M)$ . Zum einen ist  $(M, d_g)$  ein metrischer Raum und wir können  $C^\alpha(M)$  mit der Norm

$$|f|_\alpha := \|f\|_\infty + [f]_\alpha, \quad f \in C^\alpha(M)$$

ausstatten. Zum anderen haben wir die Norm

$$\|f\|_\alpha := \max_{1 \leq l \leq n} \|(\varphi_{l*}(\pi_l f))\|_\alpha, \quad f \in C^\alpha(M)$$

bezüglich eines Lokalisierungssystem  $\{(U_j, \varphi_j, \pi_j); j \in \{1, \dots, n\}\}$  für  $M$ .

**Bemerkung 3.31** Die Normen  $|\cdot|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\alpha$  sind äquivalent.

**Beweis:** Aus Bemerkung 3.27 folgt  $(C^\alpha(M), \|\cdot\|_\alpha) \hookrightarrow (C(M), \|\cdot\|_\infty)$ . Es gilt offenbar auch  $(C^\alpha(M), |\cdot|_\alpha) \hookrightarrow (C(M), \|\cdot\|_\infty)$ . Daher folgt die Behauptung aus Lemma 2.19. □

Da die Normen  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\alpha$  äquivalent sind, schreiben wir zukünftig immer  $\|\cdot\|_\alpha$  für eine der beiden Normen auf  $C^\alpha(M)$ . Denn für topologische Betrachtungen spielt es keine Rolle, welche der beiden Normen wir betrachten, und bei konkreten Rechnungen wird stets klar sein, welche Norm verwendet wird.

**Lemma 3.32** *Für  $0 < \alpha < 1$  gilt:*

$$C^1(M) \hookrightarrow C^\alpha(M) \hookrightarrow C(M).$$

**Beweis:** Sei  $f \in C^1(M)$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ . Gemäß Lemma 3.1(d) gilt,

$$f \circ \varphi^{-1} \in C^1(\varphi[U]) \subseteq C^{1-}(\varphi[U]) \subseteq c^\alpha(\varphi[U]).$$

Daher folgt  $f \in c^\alpha(M) \subseteq C^\alpha(M)$  und mit Lemma 2.19 ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Als nächstes geben wir eine zum letzten Abschnitt analoge Charakterisierung der kleinen Hölderräume auf  $(M, g)$  an.

**Satz 3.33** *Sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

(i)  $f \in c^\alpha(M)$ .

(ii)  $f \in \overline{C^\infty(M)}^{\|\cdot\|_\alpha}$ .

(iii) Für jede Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  und jedes  $\pi \in \mathcal{D}(U)$  gilt  $\varphi_*(\pi f) \in \text{buc}^\alpha(\varphi[U])$ .

**Beweis:** “ (ii)  $\Rightarrow$  (i) ”

Der Beweis von Lemma 3.32 zeigt  $C^\infty(M) \subseteq c^\alpha(M)$ . Weil  $c^\alpha(M)$  nach Korollar 3.10 ein abgeschlossener Untervektorraum von  $C^\alpha(M)$  ist, folgt

$$\overline{C^\infty(M)}^{\|\cdot\|_\alpha} \subseteq c^\alpha(M).$$

“ (i)  $\Rightarrow$  (iii) ”

Sei  $f \in c^\alpha(M)$ ,  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  und  $\pi \in \mathcal{D}(U)$ . Wegen  $f \circ \varphi^{-1} \in c^\alpha(\varphi[U])$  und  $\pi \circ \varphi^{-1} \in c^\alpha(\varphi[U]) \cap C_c(\varphi[U])$  folgt aus Lemma 3.12(b) und Korollar 3.8,

$$\varphi_*(\pi f) \in c^\alpha(\varphi[U]) \cap C_c(\varphi[U]) \subseteq \text{buc}^\alpha(\varphi[U]).$$

“ (iii)  $\Rightarrow$  (ii) ”

Weil  $M$  kompakt ist existiert gem. Lemma 3.25 ein Atlas  $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$  sowie Konstanten  $c, C > 0$  mit

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \forall q, \tilde{q} \in U_j : c|\varphi_j(q) - \varphi_j(\tilde{q})| \leq d_g(q, \tilde{q}) \leq C|\varphi_j(q) - \varphi_j(\tilde{q})|.$$

Sei weiter  $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  eine der Überdeckung  $\{U_1, \dots, U_n\}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Wir setzen:

$$g_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \varphi_{j*}(\pi_j f)(x) & , \text{ falls } x \in \varphi[U_j] \\ 0 & , \text{ falls } x \notin \varphi[U_j] \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $g_j \in buc^\alpha(\mathbb{R}^m)$  (gem. Korollar 3.8). Wegen Satz 3.19 gibt es eine Folge  $(g_{jk})_k \in BUC^\infty(\mathbb{R}^m)^\mathbb{N} : g_{jk} \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} g_j$ . Wir können o.B.d.A annehmen, dass es eine kompakte Teilmenge  $K_j \subseteq \varphi[U_j]$  gibt, mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : \text{supp}(g_j) \subseteq \text{supp}(g_{jk}) \subseteq K_j.$$

Denn aus Satz 3.19 wissen wir, dass  $\varphi_\varepsilon * g_j \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} g_j$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  für einen glättenden Kern  $\{\varphi_\varepsilon ; \varepsilon > 0\}$  und die Trägereigenschaft der Faltung (siehe [2], Theorem X.7.10) liefert

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon * g_j) \subseteq \text{supp}(g_j) + \varepsilon \bar{\mathbb{B}}^m \subseteq \varphi[U_j],$$

für  $\varepsilon$  hinreichend klein.

Wir setzen

$$f_j := \pi_j f, \quad f_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} (g_{jk} \circ \varphi_j)(p) & , \text{ falls } p \in U_j \\ 0 & , \text{ falls } p \notin U_j \end{cases}.$$

Wegen  $f_j \in c^\alpha(M)$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  haben wir,

$$f = \sum_{j=1}^n \pi_j f = \sum_{j=1}^n f_j \in c^\alpha(M).$$

Es gilt  $\text{supp}(f_{jk}) = \varphi_j^{-1}[K_j] \subseteq U_j$  und  $f_{jk} \in C^\infty(M)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $L_j := \varphi_j^{-1}[K_j] \cup \text{supp}(\pi_j)$ , dann ist  $L_j \subseteq U_j$  kompakt und

$$\varrho_j := \inf_{p \in L_j} d_g(p, U_j^c) > 0.$$

Wir zeigen  $f_{jk} \rightarrow_{\|\cdot\|_\alpha} f_j$ .

1)  $f_{jk} \rightarrow_{\|\cdot\|_\infty} f_j$ . Dies gilt wegen:

$$|f_j(p) - f_{jk}(p)| = \begin{cases} |(g_j \circ \varphi_j)(p) - (g_{jk} \circ \varphi_j)(p)| & , \text{ falls } p \in U_j \\ 0 & , \text{ falls } p \notin U_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_j - f_{jk}\|_\infty \leq \|g_j - g_{jk}\|_\infty \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

2)  $f_{jk} \rightarrow_{[\cdot]_\alpha} f_j$ . Dies gilt wegen:

a) 1. Fall,  $p \in U_j^c \vee q \in U_j^c : 0 < d_g(p, q) < \varrho_j$

$$\Rightarrow \frac{|(f_j(p) - f_{jk}(p)) - (f_j(q) - f_{jk}(q))|}{[d_g(p, q)]^\alpha} = 0.$$

b) 2. Fall,  $p \in U_j^c \vee q \in U_j^c : \varrho_j \leq d_g(p, q)$

$$\Rightarrow \frac{|(f_j(p) - f_{jk}(p)) - (f_j(q) - f_{jk}(q))|}{[d_g(p, q)]^\alpha} \leq \frac{2\|f_j - f_{jk}\|_\infty}{\varrho_j^\alpha}.$$

c) 3. Fall,  $p, q \in U_j . x := \varphi_j(p), y := \varphi_j(q)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{|(f_j(p) - f_{jk}(p)) - (f_j(q) - f_{jk}(q))|}{[d_g(p, q)]^\alpha} &\leq \frac{|(g_j(x) - g_{jk}(x)) - (g_j(y) - g_{jk}(y))|}{c^\alpha |x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{c^\alpha} [g_j - g_{jk}]_\alpha. \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} [f_j - f_{jk}]_\alpha &\leq \max\left\{\frac{1}{c^\alpha}, \frac{2}{\varrho_j^\alpha}\right\} (\|f_j - f_{jk}\|_\infty + [g_j - g_{jk}]_\alpha) \\ &\leq \max\left\{\frac{1}{c^\alpha}, \frac{2}{\varrho_j^\alpha}\right\} (\|g_j - g_{jk}\|_\alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir :

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{j=1}^n f_{jk}\|_\alpha &= \|(\sum_{j=1}^n \pi_j) f - \sum_{j=1}^n f_{jk}\|_\alpha \\ &= \|\sum_{j=1}^n (f_j - f_{jk})\|_\alpha \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|f_j - f_{jk}\|_\alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.34** *Es sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt:*

$$c^\alpha(M) = \overline{C^1(M)}^{\|\cdot\|_\alpha}.$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 3.32 und Satz 3.33.

□

**Korollar 3.35** *Für  $0 < \beta < \alpha < 1$  gilt*

$$C^\alpha(M) \xhookrightarrow{d} c^\beta(M).$$



**Beweis:** Lemma 3.1(d) und 3.11 liefern  $C^\alpha(M) \hookrightarrow c^\beta(M)$ . Wegen  $C^\infty(M) \subseteq C^\alpha(M) \subseteq c^\beta(M)$  folgt aus Satz 3.33,

$$\overline{C^\alpha(M)}^{\|\cdot\|_\beta} = c^\beta(M).$$

□

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die kleinen Hölderräume über  $M$  separabel sind. Als Vorbereitung hierfür beweisen wir zwei Lemmas.

**Lemma 3.36** *Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und beschränkt,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(BUC^k(X), \tau_{d_{k,\infty}})$  separabel.*

**Beweis:** Als eine Konsequenz des Satz von Stone und Weierstrass wird in [8], Satz 4.3-13 gezeigt, dass für jeden kompakten metrischen Raum  $(Y, \tau_d)$  der Raum  $(C(Y), \tau_{d_\infty})$  separabel ist. Daher ist  $(C(\overline{X}), \tau_{d_\infty})$  separabel. In [1], Anwendung VI.2.2 wird gezeigt,

$$(C(\overline{X}), \tau_{d_\infty}) \cong_{\text{isom.isomorph}} (BUC(X), \tau_{d_\infty}).$$

Sei  $\alpha \in \mathbb{N}^m$  und  $\tau$  die Initialtopologie der Familie  $((BUC(X), \tau_{d_\infty}), \partial^\alpha)_{|\alpha| \leq k}$  auf  $BUC^k(X)$ . Dann gilt  $\tau_{d_{k,\infty}} = \tau$ .

“ $\supseteq$ ”

Sei  $f \in BUC^k(X)$  und  $\alpha \in \mathbb{N}^m$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Wegen  $\|\partial^\alpha f\|_\infty \leq \|f\|_{k,\infty}$  ist  $\partial^\alpha : BUC^k(X) \rightarrow BUC(X)$   $(\tau_{d_{k,\infty}}, \tau_{d_\infty})$ -stetig. Daher folgt  $\tau_{d_{k,\infty}} \supseteq \tau$ .

“ $\subseteq$ ”

Sei  $f \in BUC^k(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann haben wir

$$\mathbb{B}_{d_{k,\infty}}(f, \varepsilon) = \bigcap_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha)^{-1}[\mathbb{B}_{d_\infty}(f, \varepsilon)],$$

also  $\tau_{d_{k,\infty}} \subseteq \tau$ .

$$\begin{aligned} [g \in \mathbb{B}_{d_{\|\cdot\|_{k,\infty}}}(f, \varepsilon)] &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq k : \|\partial^\alpha(f - g)\|_\infty < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq k : \partial^\alpha g \in \mathbb{B}_{d_\infty}(\partial^\alpha f, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq k : g \in (\partial^\alpha)^{-1}[\mathbb{B}_{d_\infty}(\partial^\alpha f, \varepsilon)] \\ &\Leftrightarrow g \in \bigcap_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha)^{-1}[\mathbb{B}_{d_{k,\infty}}(f, \varepsilon)] \end{aligned}$$

Sei  $\beta_{d_\infty}$  eine abzählbare Basis von  $\tau_{d_\infty}$ . Dann zeigt Lemma 2.18, dass

$$\beta := \{(\partial^\alpha)^{-1}[O] ; O \in \beta_{d_\infty}, \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

eine Subbasis von  $\tau$  ist. Bezeichne  $\mathcal{P}_e\beta$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $\beta$ . Dann ist  $\{\bigcap\beta^*; \beta^* \in \mathcal{P}_e\beta\}$  eine abzählbare Basis von  $\tau$ . Folglich ist  $(BUC^k(X), \tau_{d_k, \infty})$  ein  $A_2$ -Raum, also separabel.  $\square$

**Lemma 3.37** *Für  $k \in \mathbb{N}$  ist  $(C^k(M), \tau_{d_k})$  separabel.*

**Beweis:** Weil  $M$  kompakt ist und die kompakten Teilmengen von  $M$  eine Umgebungsbasis bilden, existiert ein endlicher Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$  von  $M$ , so dass  $V_j := \varphi_j[U_j]$  offen und beschränkt ist für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wir setzen

$$\Phi_j : C^k(M) \rightarrow BUC^k(V_j), f \mapsto \varphi_{j*}(\pi_j f).$$

Sei  $\tau$  die Initialtopologie der Familie  $((BUC^k(V_j), \tau_{d_k, \infty}), \Phi_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ . Dann gilt  $\tau_{d_k} = \tau$ .

“ $\supseteq$ ”

Sei  $f \in C^k(M)$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wegen

$$\|\Phi_j(f)\|_{k, \infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\varphi_{j*}(\pi_j f))\|_\infty \leq \|f\|_k$$

ist  $\Phi_j$   $(\tau_{d_k}, \tau_{d_k, \infty})$ -stetig. Daher folgt  $\tau_{d_k} \supseteq \tau$ .

“ $\subseteq$ ”

Sei  $f \in C^k(M)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann haben wir

$$\mathbb{B}_{d_k}(f, \varepsilon) = \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} (\Phi_j)^{-1}[\mathbb{B}_{d_k, \infty}(f, \varepsilon)],$$

also  $\tau_{d_k} \subseteq \tau$ .

$$\begin{aligned} [g \in \mathbb{B}_{d_k}(f, \varepsilon)] &\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\varphi_{j*}(\pi_j f - \pi_j g))\|_\infty < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : \|\varphi_{j*}(\pi_j f) - \varphi_{j*}(\pi_j g)\|_{k, \infty} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : \Phi_j(g) \in \mathbb{B}_{d_k, \infty}(\Phi_j(f), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : g \in (\Phi_j)^{-1}[\mathbb{B}_{d_k, \infty}(\Phi_j(f), \varepsilon)] \\ &\Leftrightarrow g \in \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} (\Phi_j)^{-1}[\mathbb{B}_{d_k, \infty}(f, \varepsilon)] \end{aligned}$$

Sei für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\beta_j$  eine abzählbare Basis der Topologie  $\tau_{d_k, \infty}$  auf  $BUC(V_j)$ . Dann zeigt Lemma 2.18, dass

$$\beta := \{(\Phi_j^{-1}[O_j]; O_j \in \beta_j, j \in \{1, \dots, n\})\}$$

eine Subbasis von  $\tau$  ist. Daher ist  $\{\bigcap \beta^* ; \beta^* \in \mathcal{P}_e \beta\}$  eine abzählbare Basis von  $\tau$ . Folglich ist  $(C^k(M), \tau_{d_k})$  ein  $A_2$ -Raum, also separabel.  $\square$

**Satz 3.38** Für  $\alpha \in (0, 1)$  ist  $(C^\alpha(M), \tau_{d_\alpha})$  separabel.

**Beweis:** Sei  $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbar dichte Teilmenge von  $(C^1(M), \tau_{d_1})$ . Bezeichne  $\iota : C^1(M) \rightarrow C^\alpha(M)$ ,  $x \mapsto x$  die Einbettung von  $C^1(M)$  in  $C^\alpha(M)$ . Wegen

$$\iota[C^1(M)] = \iota[\overline{\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}}^{\tau_{d_1}}] \subseteq \overline{\{\iota(u_n) ; n \in \mathbb{N}\}}^{\tau_{d_\alpha}} \subseteq C^\alpha(M),$$

folgt die Behauptung aus Korollar 3.34.  $\square$

**Satz 3.39** Für  $\alpha \in (0, 1)$  ist  $(C^\alpha(M), \tau_{d_\alpha})$  nicht separabel.

**Beweis:** Die Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$  ist ein Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^m$ . Daher können wir wegen Lemma 3.25 eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  finden mit  $\varphi[U] = 2\mathbb{B}^m$  und Konstanten  $c, C > 0$ , so dass für alle  $p, q \in U$  gilt,

$$c|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq d_g(p, q) \leq C|\varphi(p) - \varphi(q)|.$$

Sei für  $a \in (0, 1)$ ,  $f_{a,\alpha}$  wie in Bemerkung 3.24 gewählt und  $\pi$  eine glatte Abschneidefunktion, d.h.  $\pi \in \mathcal{D}(2\mathbb{B}^m)$  mit  $0 \leq \pi \leq 1$  und  $\pi|_{\mathbb{B}^m} = 1$ . Die Existenz einer solchen Funktion wird mit Hilfe der Approximationseigenschaft der Faltung bewiesen, (vgl. [2], Satz X.7.14). Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass  $\pi$  Lipschitz-stetig ist. Für  $a \in (0, 1)$  folgt, mit Lemma 3.1(e), Korollar 3.21 und Lemma 3.13,  $\pi f_{a,\alpha} \in BUC^\alpha(2\mathbb{B}^m) \cap C_c(2\mathbb{B}^m)$ . Wir setzen

$$v_{a,\alpha} : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \begin{cases} (\pi f_{a,\alpha} \circ \varphi)(p) & , p \in U \\ 0 & , p \notin U \end{cases}.$$

Wir zeigen,  $v_{a,\alpha} \in C^\alpha(M)$ .

Wegen  $\text{supp}(v_{a,\alpha}) = \varphi^{-1}[\text{supp}(\pi f_{a,\alpha})]$  gilt  $\text{supp}(v_{a,\alpha}) \subset\subset U$ .

(i) 1. Fall,  $p_0 \in U^c$ .

Es existiert eine Umgebung  $Q$  von  $p_0$  mit  $Q \cap \text{supp}(v_{a,\alpha}) = \emptyset$  und daher  $v_{a,\alpha}|_Q \equiv 0$ .

$\Rightarrow v_{a,\alpha}$  ist  $\alpha$ -Hölder-stetig in  $p_0$ .

(ii) 2. Fall,  $p_0 \in U$

Für alle  $p, q \in U$  gilt:

$$\frac{|v_{a,\alpha}(p) - v_{a,\alpha}(q)|}{[d_g(p, q)]^\alpha} \leq \frac{|(\pi f_{a,\alpha} \circ \varphi)(p) - (\pi f_{a,\alpha} \circ \varphi)(q)|}{c^\alpha |\varphi(p) - \varphi(q)|^\alpha} \leq \frac{[\pi f_{a,\alpha}]_\alpha}{c^\alpha}$$

$\Rightarrow v_{a,\alpha}$  ist  $\alpha$ -Hölder-stetig in  $p_0$ .

Daher haben wir  $v_{a,\alpha} \in C^\alpha(M)$ . Mit Bemerkung 3.24 folgt für  $a, b \in (0, 1)$  mit  $b > a$ ,

$$\begin{aligned} [v_{a,\alpha} - v_{b,\alpha}]_\alpha &\geq \frac{|v_{a,\alpha}(\varphi^{-1}(be_1)) - v_{b,\alpha}(\varphi^{-1}(be_1)) - v_{a,\alpha}(\varphi^{-1}(ae_1)) + v_{b,\alpha}(\varphi^{-1}(ae_1))|}{[d_g(\varphi^{-1}(be_1), \varphi^{-1}(ae_1))]^\alpha} \\ &\geq \frac{|(f_{a,\alpha}(be_1) - f_{b,\alpha}(be_1)) - (f_{a,\alpha}(ae_1) - f_{b,\alpha}(ae_1))|}{C^\alpha |b-a|^\alpha} \\ &= \frac{(b-a)^\alpha}{C^\alpha |b-a|^\alpha} \\ &= \frac{1}{C^\alpha}. \end{aligned}$$

Da die Menge  $\{v_{a,\alpha}; a \in (0, 1)\}$  überabzählbar ist folgt die Behauptung.  $\square$

Im nächsten Korollar wollen wir festhalten, dass sich auch im Riemannschen Fall die kleinen Hölderräume von den großen unterscheiden.

**Korollar 3.40** Für  $\alpha \in (0, 1)$  gilt  $buc^\alpha(M) \neq BUC^\alpha(M)$ .

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.38 und Satz 3.39.  $\square$

# Kapitel 4

## Mittlerer Krümmungsfluss

### 4.1 Der Fluss auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei in diesem Abschnitt stets:

- $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine glatte, zusammenhängende und orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $(m + 1)$ .
- $(M, g)$  eine glatte, eingebettete Riemannsche Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m$ , die kompakt, zusammenhängend und orientierbar ist.

**Satz 4.1 (Tubenumgebungstheorem)** *Es existiert ein  $a > 0$ , so dass mit  $N_a := \{(p, v) \in NM; |v|_{\tilde{g}} < a\}$ ,  $\exp|_{N_a}$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild  $\mathcal{R}_a$  ist.*

**Beweis:**  $\tilde{\mathcal{E}} := \{v \in T\tilde{M}; \text{dom}(\gamma_v) \supseteq [0, 1]\}$ ,  $\exp : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{M}$  (vgl. Notation von 2.1.11). Ferner setzen wir  $\mathcal{E}_N := \tilde{\mathcal{E}} \cap NM$ ,  $M_0 := \{(p, 0); p \in M\} \subseteq NM$ . Weil  $NM$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $T\tilde{M}$  ist und  $\tilde{\mathcal{E}}$  offen in  $T\tilde{M}$  ist, ist  $\exp|_{\mathcal{E}_N}$  glatt. Wir zeigen zunächst, dass  $\exp|_{\mathcal{E}_N}$  ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von  $M_0$  ist, indem wir zeigen, dass das Tangential  $(\exp|_{\mathcal{E}_N})_*$  surjektiv ist für jedes  $(p, 0) \in M_0$ .

(i) 1. Fall,  $v \in T_p M$ .

Es existiert ein glatter Weg  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \gamma(t) = v$ . Wir setzen  $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow NM$ ,  $t \mapsto (\gamma(t), 0)$ .

$$(\exp|_{\mathcal{E}_N})_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\gamma}(t) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp|_{\mathcal{E}_N} \circ \tilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t) = v.$$

(ii) 2. Fall,  $w \in N_p M$ .

Wir setzen  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow NM$ ,  $t \mapsto (p, tw)$ .

$$(\exp|_{\mathcal{E}_N})_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sigma(t) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp|_{\mathcal{E}_N} \circ \sigma)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp_p(tw)) = w.$$

Wegen  $T_p \tilde{M} = T_p M \oplus N_p M$  sehen wir, dass  $(\exp|_{\mathcal{E}_N})_*$  surjektiv ist. Aus dem Umkehrsatz folgt daher, dass  $\exp|_{\mathcal{E}_N}$  ein Diffeomorphismus in einer offenen Umgebung  $O_{(p,0)}$  von  $(p, 0)$  in  $NM$  ist. Wegen Korollar 2.14 existiert eine offene Umgebung  $U_p$  von  $p$  in  $M$  sowie  $\varepsilon_p > 0$  mit

$$V_{(p,0)} := \{(q, w) \in NM; q \in U_p, |w|_{\tilde{g}} < \varepsilon_p\} \subseteq O_{(p,0)}.$$

Da dies für jeden Punkt  $(p, 0) \in M_0$  richtig ist, erhalten wir eine offene Überdeckung  $\{V_{(p,0)}\}_{(p,0) \in M_0}$  von  $M_0$ . Wegen der Kompaktheit von  $M_0$  ( $M \rightarrow M_0$ ,  $p \mapsto (p, 0)$  ist stetig) existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{V_{(p_1,0)}, \dots, V_{(p_k,0)}\}$  mit entsprechenden offenen Mengen  $\{U_1, \dots, U_k\}$  und entsprechenden  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ .

$\{U_1, \dots, U_k\}$  ist eine offene Überdeckung von  $M$  und hat daher eine Lebesgue-Zahl  $\delta$ . Ferner existiert wegen der Kompaktheit von  $M$  und Lemma 2.11 ein  $r > 0$ , so dass für alle  $p \in M$ ,  $\exp_p$  mindestens auf  $r\mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}|_{\tilde{g}(p)}} \subseteq T_p \tilde{M}$  definiert ist und ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wir wählen  $0 < a < \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, r, \delta/2\}$ . Dann ist  $\exp|_{N_a}$  injektiv: Seien  $(p, v), (p', v') \in N_a$  mit  $\exp((p, v)) = \exp((p', v')) =: q$ . Angenommen  $d_{\tilde{g}}(p, p') \geq \delta$ .

$$\Rightarrow 2a \geq d_{\tilde{g}}(p, q) + d_{\tilde{g}}(q, p') \geq d_{\tilde{g}}(p, p') \geq \delta.$$

Dies ist ein Widerspruch! Hierbei haben wir  $B(p, a) = \mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}}(p, a)$  bzw.  $B(p', a) = \mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}}(p', a)$  benutzt (vgl. Bemerkung 2.10 (ii)). Folglich haben wir  $d_{\tilde{g}}(p, p') < \delta$ . Daher gilt  $p, p' \in U_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ , woraus  $p = p'$  folgt. Somit haben wir insgesamt  $\exp|_{N_a} \in \text{Diff}(N_a, \mathcal{R}_a)$ . □

**Korollar 4.2** *Bezeichne  $\nu$  das glatte Einheitsnormalenfeld auf  $M$  (gem. Lemma 2.17). Dann ist*

$$\vartheta : M \times (-a, a) \rightarrow \tilde{M}, (p, \lambda) \mapsto \exp_p(\lambda\nu(p))$$

*ein Diffeomorphismus von  $M \times (-a, a)$  auf  $\mathcal{R}_a$ .*

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.1, Lemma 2.17 und Lemma 2.3. □

Wir zerlegen die Inverse von  $\vartheta$  in  $\vartheta^{-1} = (P, \Lambda)$ , so dass  $P \in C^\infty(\mathcal{R}_a, M)$  und  $\Lambda \in C^\infty(\mathcal{R}_a, (-a, a))$ . Im euklidischen Fall  $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{m+1}, \eta)$  und der Identifizierung von  $X \in T_p\mathbb{R}^{m+1}$  mit  $p + X \in \mathbb{R}^{m+1}$  haben wir,

$$\vartheta : M \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, (p, \lambda) \mapsto p + \lambda\nu(p).$$

**Satz 4.3** *Es gilt,*

$$\mathcal{R}_a = \mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}}(M, a) := \{p \in \tilde{M}; d_{\tilde{g}}(p, M) < a\},$$

*d.h.  $\mathcal{R}_a$  besteht genau aus den Punkten, deren Abstand von  $M$  bezüglich der Metrik  $d_{\tilde{g}}$  kleiner als  $a$  ist.*

**Beweis:** “ $\subseteq$ “

Dies folgt aus Bemerkung 2.10 (b).

“ $\supseteq$ “

Sei  $p \in \mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}}(M, a) \setminus M$ . Weil  $M$  kompakt ist existiert ein  $q \in M$  mit

$$d_{\tilde{g}}(p, q) = d_{\tilde{g}}(p, M) =: r.$$

Wegen  $p \in \mathbb{B}_{d_{\tilde{g}}}(q, a) = B(q, a)$  existiert eine minimierende Geodätische  $\Gamma_{geo}$  von  $q$  nach  $p$ . Wir müssen zeigen, dass  $\Gamma_{geo}$  die Hyperebene  $M$  senkrecht schneidet. Dazu können wir annehmen, dass  $q$  in einem geodätischen Ball  $B(p, R)$  mit Radius  $R > r$  um  $p$  enthalten ist.

[ Ist dies nicht der Fall, finden wir gem. Lemma 2.11 eine Uniform-Normale-Umgebung  $W$  von  $q$ . Sei  $p' \in W \setminus \{q\} \cap \Gamma_{geo}$ . Dann gilt  $d_{\tilde{g}}(p', q) = d_{\tilde{g}}(p', M)$ . Angenommen: Es existiert ein  $q' \in M : d_{\tilde{g}}(p', q') < d_{\tilde{g}}(p', q)$ , so haben wir,

$$d_{\tilde{g}}(q', p) \leq d_{\tilde{g}}(q', p') + d_{\tilde{g}}(p', p) < d_{\tilde{g}}(q, p') + d_{\tilde{g}}(p', p) = L(\Gamma_{geo}) = d_{\tilde{g}}(q, p).$$

Dies ist ein Widerspruch! ]

Sei  $\eta$  eine Parametrisierung von  $\Gamma_{geo}$  nach der Bogenlänge und mit Anfangspunkt  $\eta(0) = p$ . Für  $X \in T_qM$  existiert ein  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \cap B(p, R)$  mit  $\sigma(0) = q$  und  $\sigma'(0) = X$ . Ferner definieren wir  $\tilde{\sigma} := \frac{1}{r}(\exp_p^{-1} \circ \sigma) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p\tilde{M}$  und

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, r] \rightarrow \tilde{M}, (s, t) \mapsto \exp_p(t\tilde{\sigma}(s)).$$

$\tilde{\sigma}(0)$  hat in Normalkoordinaten  $(x^1, \dots, x^{m+1})$  (vgl. Abschnitt 2.1.11) die Form

$$\tilde{\sigma}(0) = \frac{1}{r}x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Wegen Bemerkung 2.10 hat daher  $\tilde{\sigma}(0)$  Länge 1 und es folgt  $\gamma(0, t) = \eta(t)$  für alle  $t \in [0, r]$ . Es gilt,

$$\begin{aligned} V(r) &= \partial_s \gamma(0, r) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(r\tilde{\sigma}(s)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sigma(s) = X, \\ V(0) &= \partial_s \gamma(0, 0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(0) = 0. \end{aligned}$$

Daher folgt aus der Variationsformel (Lemma 2.7),

$$0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\Gamma_s) = (V(r)|\dot{\eta}(r))_{\tilde{g}} + (V(0)|\dot{\eta}(0))_{\tilde{g}}.$$

Also haben wir  $(X|\dot{\eta}(r))_{\tilde{g}} = 0$ . Da dies für alle  $X \in T_q M$  richtig ist, folgt  $\dot{\eta}(r) = \pm\nu(q)$ . Hiermit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Wir nennen  $Ad := \{\rho \in C^\infty(M); \|\rho\|_\infty < a\}$  die Menge der zulässigen Funktionen. Für  $\rho \in Ad$  definieren wir,

$$\vartheta_\rho : M \rightarrow \mathcal{R}_a, p \mapsto \exp_p(\rho(p)\nu(p)).$$

**Korollar 4.4** *Das Bild  $M_\rho := \text{im}(\vartheta_\rho)$  von  $\vartheta_\rho$  ist eine kompakte, glatte, eingebettete Hyperfläche von  $\tilde{M}$  und es gilt  $\vartheta_\rho \in \text{Diff}(M, M_\rho)$ .*

**Beweis:** Offenbar ist  $\vartheta_\rho$  glatt und injektiv. Insbesondere ist  $M_\rho$  kompakt. Wir setzen

$$\Phi_\rho : \mathcal{R}_a \rightarrow \mathbb{R}, q \mapsto \Lambda(q) - \rho(P(q)).$$

$\Phi_\rho$  ist glatt und es gilt  $q \in M_\rho \Leftrightarrow q \in \Phi_\rho^{-1}(0)$ . Wir haben  $\text{grad } \Phi_\rho \neq 0$ : Mit  $x \in \mathcal{R}_a$  und  $s := P(x)$  sei

$$\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathcal{R}_a, t \mapsto \exp_s(t\nu(s)).$$

Dann haben wir für  $t_0 := \Lambda(x) \in (-a, a)$ :

$$\begin{aligned} (\rho \circ P)_*(\gamma'(t_0)) &= (\rho \circ P \circ \gamma)'(t_0) = 0, \\ (\Lambda)_*(\gamma'(t_0)) &= (\Lambda \circ \gamma)'(t_0) = (t)'(t_0) = 1. \end{aligned}$$

Aus dem Satz vom regulären Wert folgern wir, dass  $M_\rho$  eine glatte, eingebettete Hyperfläche von  $\tilde{M}$  ist. Wegen  $P|_{M_\rho} \in C^\infty(M_\rho, M)$  und  $\vartheta_\rho \in C^\infty(M, M_\rho)$  sowie  $P|_{M_\rho} \circ \vartheta_\rho = \text{id}_M$  und  $\vartheta_\rho \circ P|_{M_\rho} = \text{id}_{M_\rho}$  folgt  $\vartheta_\rho \in \text{Diff}(M, M_\rho)$ .  $\square$

Es sei nun  $\rho \in C^\infty((0, T), C^\infty(M))$ . Wir setzen:

$$\hat{\rho} : (0, T) \times M \rightarrow \mathbb{R}, (t, p) \mapsto \rho(t)(p).$$



**Lemma 4.5**

(a)  $\hat{\rho} \in C^\infty((0, T) \times M)$ .

(b)  $\forall p \in M : \hat{\rho}(\cdot, p) \in C^\infty((0, T))$  und

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \hat{\rho}(t, p) = \frac{d^n}{dt^n} \rho(t)(p).$$

**Beweis:**

(b) Sei  $(t_0, p) \in (0, T) \times M$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\hat{\rho}(t, p) - \hat{\rho}(t_0, p)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\rho(t)(p) - \rho(t_0)(p)}{t - t_0} = \frac{d}{dt} \rho(t_0)(p).$$

Der Rest folgt durch Induktion.

(a) Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ . Wir definieren,

$$\hat{\rho}_\varphi : (0, T) \times \varphi[U] \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \hat{\rho}(t, \varphi^{-1}(x)).$$

Seien  $\alpha \in \mathbb{N}^m, n \in \mathbb{N}$  und  $(t, x) \in (0, T) \times \varphi[U]$ .  $\partial_t^n$  bezeichne die n-fache partielle Ableitung nach der ersten Variable und  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_m^{\alpha_m}$  bezeichne die partiellen Ableitungen bezüglich der zweiten Variable.

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_t^n \hat{\rho}_\varphi(t, x) &= \partial^\alpha \partial_t^n \hat{\rho}(t, \varphi^{-1}(x)) \\ &= \partial^\alpha \left( \frac{d^n}{dt^n} \rho(t) \circ \varphi^{-1} \right)(x). \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{d^n}{dt^n} \rho \in C((0, T), C^\infty(M))$  folgt  $\partial^\alpha \partial_t^n \hat{\rho}_\varphi \in C((0, T) \times \varphi[U])$ . Hieraus ergibt sich die Behauptung.

□

Die Menge der zulässigen Funktionen  $Ad$  ist eine offene Teilmenge von  $C^\infty(M)$ . Sei  $\rho \in C^\infty((0, T), Ad)$ . Wir definieren,

$$\Phi_{\hat{\rho}} : (0, T) \times \mathcal{R}_a \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \Lambda(x) - \hat{\rho}(t, P(x))$$

und

$$\vartheta_{\hat{\rho}} : (0, T) \times M \rightarrow \mathcal{R}_a, (t, p) \mapsto \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p)).$$

Sofern keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir wieder  $\Phi_\rho$  statt  $\Phi_{\hat{\rho}}$  bzw.  $\vartheta_\rho$  statt  $\vartheta_{\hat{\rho}}$ . Außerdem setzen wir,

$$M_{\rho(t)} := \text{im}(\vartheta_{\rho(t)}) = \text{im}(\vartheta_\rho(t, \cdot)) = \{x \in \tilde{M}; x = \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p)), p \in M\}, t \in (0, T).$$

Aus Korollar 4.4 folgt, dass  $M_{\rho(t)}$  eine glatte, kompakte, zusammenhängende Hyperfläche von  $\tilde{M}$  ist. Wegen  $M_{\rho(t)} = \Phi_\rho^{-1}(t, \cdot)(0)$  ist  $M_{\rho(t)}$  orientierbar und wir erklären das äußere Einheitsnormalenfeld  $\nu(t, \cdot)$  auf  $M_{\rho(t)}$  am Punkt  $x = \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))$  durch

$$\nu(t, p) := \frac{\text{grad } \Phi_\rho(t, x)}{|\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}}}\Big|_{x=\vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))}, \quad (t, p) \in (0, T) \times M.$$

Wir kommen nun zur Definition der Normalgeschwindigkeit. Sei  $(t, p) \in (0, T) \times M$  und  $x = \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))$ . Weil  $\mathcal{R}_a$  offen ist, schließen wir aus den Eigenschaften der Exponential-Abbildung (Lemma 2.8), dass es ein Intervall  $(-b, b)$  gibt, so dass  $\exp_x(r\nu(t, p))$  definiert ist, und dass  $\exp_x(r\nu(t, p)) \in \mathcal{R}_a$  für alle  $r \in (-b, b)$  gilt. Wir definieren die Hilfsfunktion  $\psi$  durch

$$\psi(\tau, r) := \Lambda(\exp_x(r\nu(t, p))) - \hat{\rho}(t + \tau, P(\exp_x(r\nu(t, p))))$$

für  $(\tau, r) \in (-t, T - t) \times (-b, b)$ . Es gilt  $\psi \in C^\infty((-t, T - t) \times (-b, b))$  und  $\psi(0, 0) = \Lambda(x) - \hat{\rho}(t, p) = 0$ .

$$\begin{aligned} \partial_2 \psi(0, 0) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \psi(0, \cdot) \\ &= \Lambda_*\left(\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \exp_x(r\nu(t, p))\right) - \hat{\rho}(t, \cdot)_* P_*\left(\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \exp_x(r\nu(t, p))\right) \\ &= (\Lambda_* - \hat{\rho}(t, \cdot)_* P_*)\nu(t, p) \\ &= (\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\nu(t, p)})_{\tilde{g}} \\ &= |\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}} \neq 0. \end{aligned}$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass es ein  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutig bestimmte Funktion  $h \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R})$  gibt mit  $\psi(\tau, h(\tau)) = 0$  für  $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Außerdem gilt

$$h'(0) = \frac{-\partial_1 \psi(0, 0)}{\partial_2 \psi(0, 0)} = \frac{\partial_t \hat{\rho}(t, p)}{|\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}}}\Big|_{x=\vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))}.$$

Wir haben  $\exp_x(h(\tau)\nu(t, p)) \in M_{\rho(t+h(\tau))}$ . Daher ist  $h(\tau)$  der Zuwachs am Punkt  $x = \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p)) \in M_{\rho(t)}$  in Richtung der äußeren Einheitsnormale  $\nu(t, p)$ . Wir nennen  $h'(0)$  die Normalgeschwindigkeit  $V(t, p)$  von  $[t \mapsto M_{\rho(t)}]$  bei  $t$  und  $x = \vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))$ . D.h.

$$V(t, p) := h'(0) = \frac{\partial_t \hat{\rho}(t, p)}{|\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}}}\Big|_{x=\vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))}.$$

Für  $\rho \in C^\infty((0, T), Ad)$  definieren wir  $L_\rho := L(\rho)$  und  $H_\rho := H(\rho)$  durch

$$L_\rho(t, p) := |\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}} \Big|_{x=\vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))}, \quad (t, p) \in (0, T) \times M$$

bzw.

$$H_\rho(t, p) := \vartheta_{\rho(t)}^* H_{M_{\rho(t)}}(p), \quad p \in M.$$

Ferner setzen wir,

$$G(\rho) := L_\rho \left( \frac{1}{\int_M \vartheta_\rho^* dO_{M_\rho}} \int_M H_\rho \vartheta_\rho^* dO_{M_\rho} - H_\rho \right).$$

Wir betrachten nun die Evolutionsgleichung

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = G(\rho(t)), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (4.1)$$

Sei  $0 < \beta < 1$ . Eine Funktion  $\rho : [0, T) \rightarrow \mathcal{V} := \{f \in C^{1+\beta}(M); \|f\|_{1+\beta} < a\}$  heißt klassische Lösung, wenn die Evolutionsgleichung (4.1) punktweise erfüllt ist und wenn  $\rho \in C([0, T), \mathcal{V}) \cap C^\infty((0, T), C^\infty(M))$  gilt. Sei  $\rho$  eine klassische Lösung,  $t \in (0, T)$  und  $x \in M_{\rho(t)}$ . Dann existiert ein eindeutiges  $p \in M$  mit  $\vartheta_{\rho(t)}(p) = \exp_p(\hat{\rho}(t, p)\nu(p)) = x$ . Daher haben wir

$$\frac{d\rho}{dt}(t)(p) = L_\rho(t, p) \left( \frac{1}{\int_M \vartheta_{\rho(t)}^* dO_{M_{\rho(t)}}} \int_M H_{\rho(t)} \vartheta_{\rho(t)}^* dO_{M_{\rho(t)}} - H_{\rho(t)}(p) \right),$$

mit Lemma 4.5 folgt,

$$\frac{\partial_t \hat{\rho}(t, p)}{|\text{grad } \Phi_\rho(t, x)|_{\tilde{g}} \Big|_{x=\vartheta(p, \hat{\rho}(t, p))}} = \overline{H}_{\rho(t)} - \vartheta_{\rho(t)}^* H_{M_{\rho(t)}}(p).$$

Also insgesamt,

$$V(t, p) = \overline{H}_{M_{\rho(t)}} - H_{M_{\rho(t)}}(x).$$

Daher erfüllt die Familie  $\{M_{\rho(t)}; t \in [0, T)\}$  die Gleichung des gemittelten mittleren Krümmungsfluss,

$$V = \overline{H} - H, \quad M_0 = M_{\rho(0)}. \quad (4.2)$$

## 4.2 Der Fluss in der Nähe von Sphären

Sei nun  $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{m+1}, \eta)$  mit der euklidischen Metrik  $\eta$ . Ferner sei  $(M, g) = (\Gamma, \eta|_\Gamma)$ , wobei  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  eine glatte, eingebettete Hyperfläche des  $\mathbb{R}^{m+1}$  ist,

die kompakt, zusammenhängend und orientierbar ist. Unter diesen Voraussetzungen wird in [6] gezeigt, dass die Evolutionsgleichung (4.1) eine quasilineare Struktur trägt, und dass sich auf sie ein allgemeines Resultat von H. Amann über die Existenz und Eindeutigkeit von quasilinearen parabolischen Problemen anwenden läßt. Hieraus erhält man, dass für  $\rho_0 \in \mathcal{V}$  Gleichung (4.1) eine eindeutige lokale klassische Lösung besitzt.

In [6] wurde darüber hinaus folgendes gezeigt:

**Satz 4.6**

- a)  $\rho_0$  ist genau dann ein Equilibrium von (4.1), wenn  $M_{\rho_0}$  eine Sphäre ist.
- b) Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  eine Sphäre. Dann existiert eine Umgebung  $W$  von 0 in  $C^{1+\beta}(S)$ , so dass für alle  $\rho_0 \in W$  die Lösung  $\rho(\cdot, \rho_0)$  von (4.1) global existiert und exponentiell gegen eine Sphäre konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ , wobei die Konvergenz in der  $C^k(S)$ -Topologie stattfindet für festes  $k \in \mathbb{N}$ .

Im Schlussteil der Arbeit wollen wir ein Korollar beweisen, dass sich aus dem Teil b) des Satzes ergibt.

**Korollar 4.7** *Konvexität ist nicht notwendig für die globale Existenz des gemittelten mittleren Krümmungsfluß (4.2). Genauer existieren nicht-konvexe Hyperflächen  $\mathcal{G}$ , so dass die Lösung von (4.2) mit Anfangsbedingung  $M_0 = \mathcal{G}$  global existiert und exponentiell gegen eine Sphäre konvergiert.*

Für den Beweis des Korollars betrachten wir den Fall ebener Kurven.

**Lemma 4.8** *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ , so dass*

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (1 + f(t))(\cos t, \sin t)$$

eine reguläre Kurve ist. Dann gilt für die Krümmung  $\kappa$  von  $\gamma$ ,

$$\kappa(t) = \frac{1 - (1 + f(t))\ddot{f}(t) + 2f(t) + (f(t))^2 + 2(\dot{f}(t))^2}{[(1 + f(t))^2 + (\dot{f}(t))^2]^{3/2}}.$$

Für  $f(t) \ll 1$  und  $\dot{f}(t) \ll 1$  haben wir daher,

$$\kappa(t) \approx 1 - \ddot{f}(t).$$

**Beweis:** Nach [1], Satz VIII.2.10 gilt,

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^{3/2}},$$

mit  $x(t) := (1 + f(t)) \cos t$  und  $y(t) := (1 + f(t)) \sin t$ . Wir berechnen,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -(1 + f(t)) \sin t + \dot{f}(t) \cos t, \\ \ddot{x}(t) &= -2\dot{f}(t) \sin t + (\ddot{f}(t) - \dot{f}(t) - 1) \cos t, \\ \dot{y}(t) &= \dot{f}(t) \sin t + (1 + f(t)) \cos t, \\ \ddot{y}(t) &= (\ddot{f}(t) - \dot{f}(t) - 1) \sin t + 2\dot{f}(t) \cos t.\end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir,  $a := a(t) := -(1 + f(t))$ ,  $b := b(t) := \dot{f}(t)$  und  $c := c(t) := \ddot{f}(t) - \dot{f}(t) - 1$ . Damit erhalten wir,

$$\begin{aligned}& \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t) \\ &= (a \sin t + b \cos t)(c \sin t + 2b \cos t) + (a \cos t - b \sin t)(c \cos t - 2b \sin t) \\ &= ac \sin^2 t + 2ab \sin t \cos t + bc \sin t \cos t + 2b^2 \cos^2 t + ac \cos^2 t \\ &\quad - 2ab \sin t \cos t - bc \sin t \cos t + 2b^2 \sin^2 t \\ &= ac + 2b^2 \\ &= -(1 + f(t))(\ddot{f}(t) - \dot{f}(t) - 1) + 2(\dot{f}(t))^2 \\ &= 1 - (1 + f(t))\ddot{f}(t) + 2\dot{f}(t) + (f(t))^2 + 2(\dot{f}(t))^2.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 &= (a \sin t + b \cos t)^2 + (b \sin t - a \cos t)^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= (1 + f(t))^2 + (\dot{f}(t))^2\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Für  $\rho \in c^{1+\beta}(S^1)$  setzen wir wieder

$$\vartheta_\rho : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto p + \rho(p)\nu(p),$$

sowie  $\Gamma_\rho := \text{im}(\vartheta_\rho)$ .

Um das Korollar zu beweisen, zeigen wir, dass in jeder Umgebung  $W$  von 0 in  $c^{1+\beta}(S^1)$  ein  $\rho_0 \in W$  existiert, so dass  $\Gamma_{\rho_0}$  eine nicht-konvexe Kurve ist.

Wir geben zunächst einen glatten Atlas für  $S^1$  an. Seien

$$\begin{aligned}U_x^+ &:= \{(x, y) \in S^1; x > 0\} \quad , \quad U_x^- := \{(x, y) \in S^1; x < 0\}, \\ U_y^+ &:= \{(x, y) \in S^1; y > 0\} \quad , \quad U_y^- := \{(x, y) \in S^1; y < 0\},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\varphi_x^+ : U_x^+ &\rightarrow (-1, 1), (x, y) \mapsto y, & \varphi_x^- : U_x^- &\rightarrow (-1, 1), (x, y) \mapsto y, \\ \varphi_y^+ : U_y^+ &\rightarrow (-1, 1), (x, y) \mapsto x, & \varphi_y^- : U_y^- &\rightarrow (-1, 1), (x, y) \mapsto x.\end{aligned}$$

Dann rechnet man leicht nach, dass

$$\mathcal{A} := \{(U_x^+, \varphi_x^+), (U_x^-, \varphi_x^-), (U_y^+, \varphi_y^+), (U_y^-, \varphi_y^-)\}$$

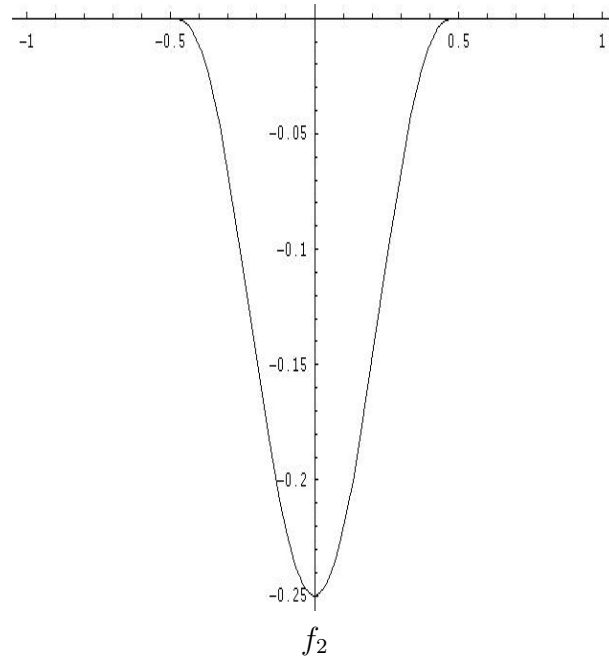
ein glatter Atlas für  $S^1$  ist.

**Beweis:**[von Korollar 4.7] Sei  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Wir definieren folgende Abbildungen,

$$\begin{aligned}\psi : U_x^+ &\rightarrow (-\pi/2, \pi/2), (x, y) \mapsto \arcsin y, \\ f_n : (-\pi/2, \pi/2) &\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n^2}(nt - 1)^3(nt + 1)^3 & , t \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & , t \notin [-1/n, 1/n] \end{cases},\end{aligned}$$

und

$$v_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \begin{cases} (f_n \circ \psi)(p) & , p \in U_x^+ \\ 0 & , p \notin U_x^+ \end{cases}.$$



Offensichtlich gilt,

$$\text{supp}(v_n) \subseteq \{(x, y) \in U_x^+; -\sin 1 \leq y \leq \sin 1\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^\times.$$

Im ersten Schritt zeigen wir  $v_n \rightarrow_{\|\cdot\|_{1+\beta}} 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dazu ist es sinnvoll, einen anderen Atlas zu verwenden. Wir stellen fest, dass  $(U_x^+, \psi)$  eine Karte von  $S^1$  ist. Denn es gilt  $\psi = \arcsin \circ \varphi_x^+$ . Daher ist  $\psi$  ein Homöomorphismus auf sein Bild und die Kartenwechsel sind glatt. Außerdem gilt

$$\psi^{-1}(t) = (\varphi_x^+)^{-1} \circ \sin(t) = ((1 - \sin^2 t)^{1/2}, \sin t) = (\cos t, \sin t), t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Wir setzen weiter,

$$\tilde{U}_y^+ := \{(x, y) \in S^1; y > \sin 1\}, \tilde{U}_y^- := \{(x, y) \in S^1; y < -\sin 1\}$$

und

$$\tilde{\varphi}_y^+ := \varphi_y^+|_{\tilde{U}_y^+}, \tilde{\varphi}_y^- := \varphi_y^-|_{\tilde{U}_y^-}.$$

Dann ist

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{(U_x^+, \psi), (U_x^-, \varphi_x^-), (\tilde{U}_y^+, \tilde{\varphi}_y^+), (\tilde{U}_y^-, \tilde{\varphi}_y^-)\}$$

ein glatter Atlas und  $\tilde{\mathcal{A}}$  ist äquivalent zu  $\mathcal{A}$ . Wir berechnen  $\|v_n\|_{1+\beta}$  bezüglich des Atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

Sei  $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$  eine der offenen Überdeckung  $\mathcal{O} := \{U_x^+, U_x^-, \tilde{U}_y^+, \tilde{U}_y^-\}$  untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Nach Konstruktion der Überdeckung  $\mathcal{O}$  existiert ein  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  mit

$$\pi_j \circ \psi^{-1}|_{[-1,1]} \equiv 1.$$

Damit folgt,

$$\|v_n\|_{1+\beta} = \|\psi_*(\pi_j v_n)\|_{1+\beta} = \|f_n\|_{1+\beta}.$$

Wir berechnen:

$$\dot{f}_n(t) = \begin{cases} \frac{3}{n}((nt-1)^2(nt+1)^3 + (nt-1)^3(nt+1)^2) & , t \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & , t \notin [-1/n, 1/n] \end{cases},$$

und

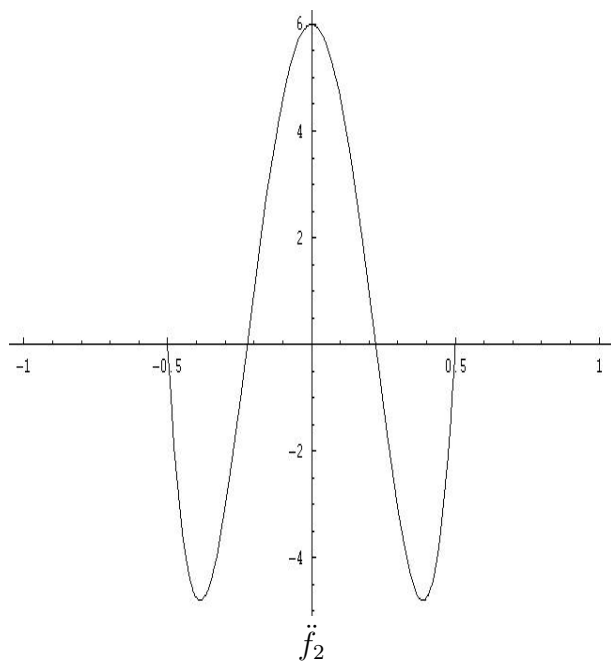
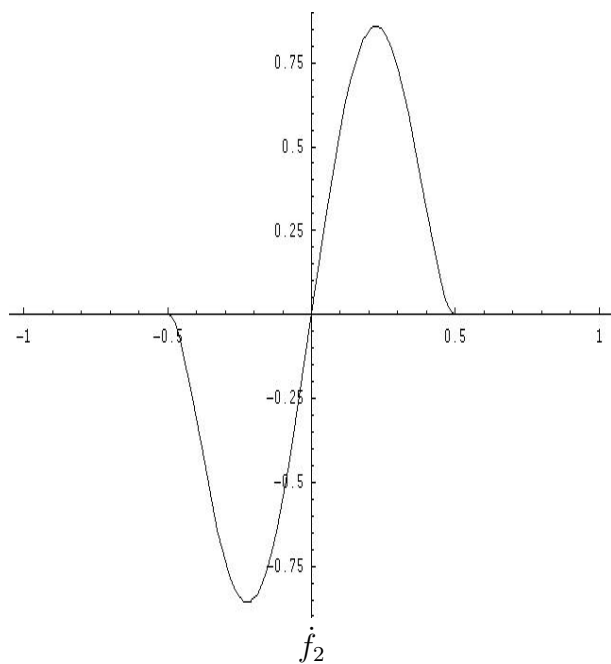
$$\ddot{f}_n(t) = \begin{cases} 6(nt-1)(nt+1)^3 + 18(nt-1)^2(nt+1)^2 + 6(nt-1)^3(nt+1) & , t \in [-1/n, 1/n] \\ 0 & , t \notin [-1/n, 1/n] \end{cases}.$$

Daher haben wir

$$\|f_n\|_\infty = 1/n^2 \|f_1\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und

$$\|\dot{f}_n\|_\infty = 1/n \|\dot{f}_1\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$



Es bleibt noch zu zeigen,

$$[\dot{f}_n]_\beta \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$



Sei  $s, t \in [-\pi/2, \pi/2]$  mit  $s \neq t$ .

(i) 1. Fall,  $s, t \in [-1/n, 1/n]$ .

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(t)|}{|s-t|^\beta} &= |s-t|^{1-\beta} \frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(t)|}{|s-t|} \\ &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\beta} \sup_{\tau \in [-1/n, 1/n]} |\ddot{f}_n(\tau)| \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\beta} \sup_{\tau \in [-1, 1]} |\ddot{f}_1(\tau)|. \end{aligned}$$

(ii) 2. Fall,  $s \in (-1/n, 1/n)$ ,  $t \in [1/n, \pi/2]$ .

Wegen  $|s-t| = t-s \geq 1/n - s = |s-1/n|$  folgt,

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(t)|}{|s-t|^\beta} &\leq \frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(1/n)|}{|s-1/n|^\beta} \\ &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\beta} \sup_{\tau \in [-1, 1]} |\ddot{f}_1(\tau)|. \end{aligned}$$

(iii) 3. Fall,  $s \in (-1/n, 1/n)$ ,  $t \in [-\pi/2, -1/n]$ .

Es folgt analog zu (ii)

$$\frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(t)|}{|s-t|^\beta} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\beta} \sup_{\tau \in [-1, 1]} |\ddot{f}_1(\tau)|.$$

(iv) In den übrigen Fällen gilt,

$$\frac{|\dot{f}_n(s) - \dot{f}_n(t)|}{|s-t|^\beta} = 0.$$

Damit haben wir gezeigt,

$$[\dot{f}_n]_\beta \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\beta} \sup_{\tau \in [-1, 1]} |\ddot{f}_1(\tau)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Also insgesamt,

$$\|v_n\|_{1+\beta} = \|f_n\|_{1+\beta} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass  $\Gamma_n := \Gamma_{v_n}$  eine nicht-konvexe Kurve ist. Eine Parametrisierung von  $\Gamma_n$  ist gegeben durch,

$$\gamma_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1 + v_n(\cos t, \sin t)) (\cos t, \sin t).$$

Damit erhalten wir,

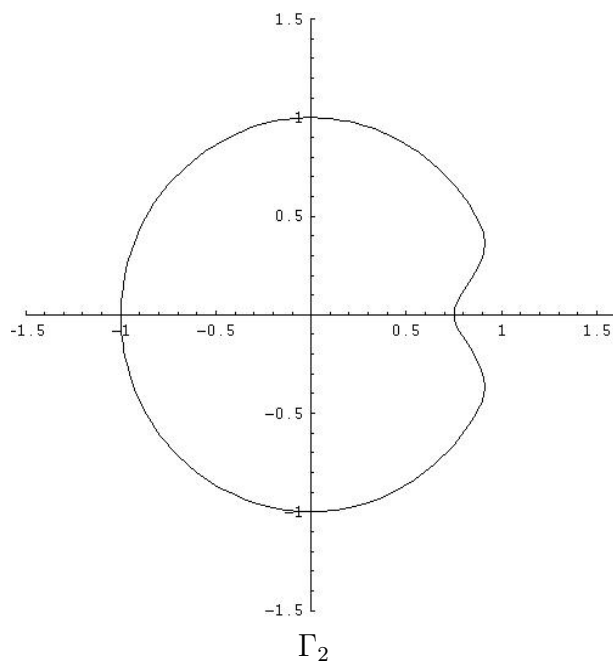
$$\gamma_n(t) = \begin{cases} (1 + f_n(t)) (\cos t, \sin t) & , t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ (\cos t, \sin t) & , t \notin (-\pi/2, \pi/2) \end{cases}.$$

Für  $n > 1$  ist  $\gamma_n$  eine reguläre  $C^2$ -Kurve und mit  $f_n(0) = -1/n^2$ ,  $\dot{f}_n(0) = 0$  und  $\ddot{f}_n(0) = 6$  folgt aus Lemma 4.8,

$$\kappa_{\gamma_n}(0) = \frac{1 - (1 - 1/n^2)6 - 2/n^2 + 1/n^4}{|1 - 1/n^2|^3} < 0.$$

Offenbar gilt  $\kappa_{\gamma_n}(t) = 1$  für  $t \notin [-1/n, 1/n]$ , was beweist, dass  $\Gamma_n$  eine nicht-konvexe Kurve ist für  $n > 1$ .

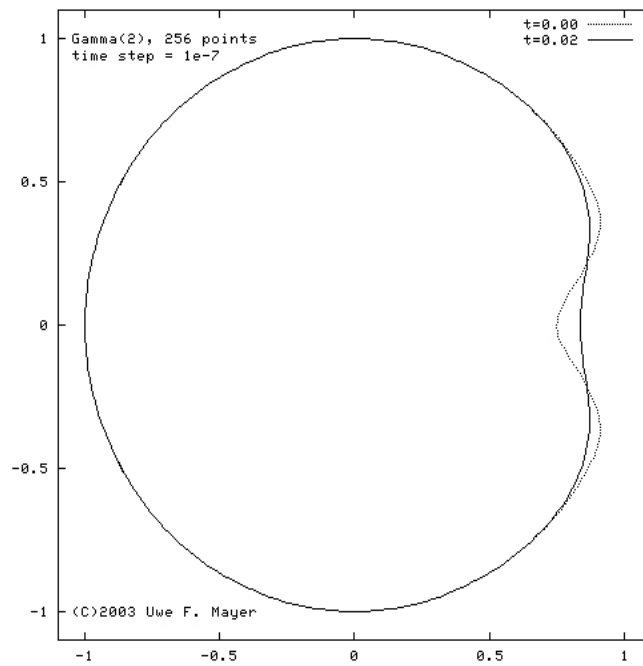
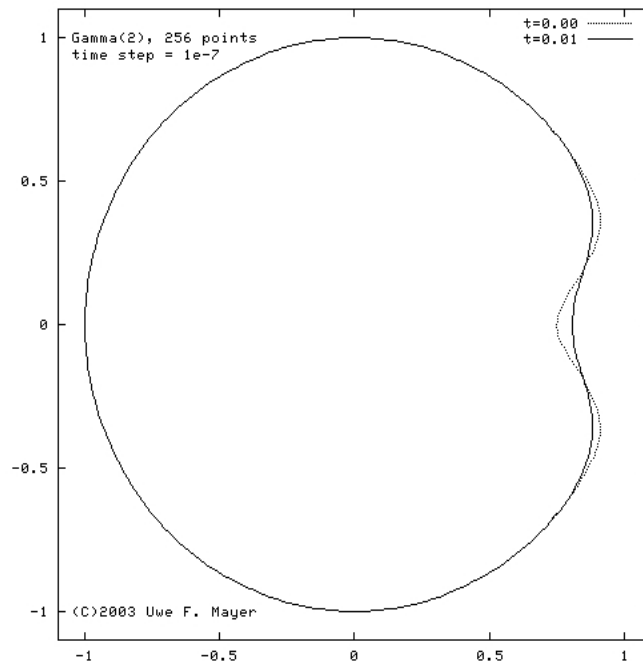
□

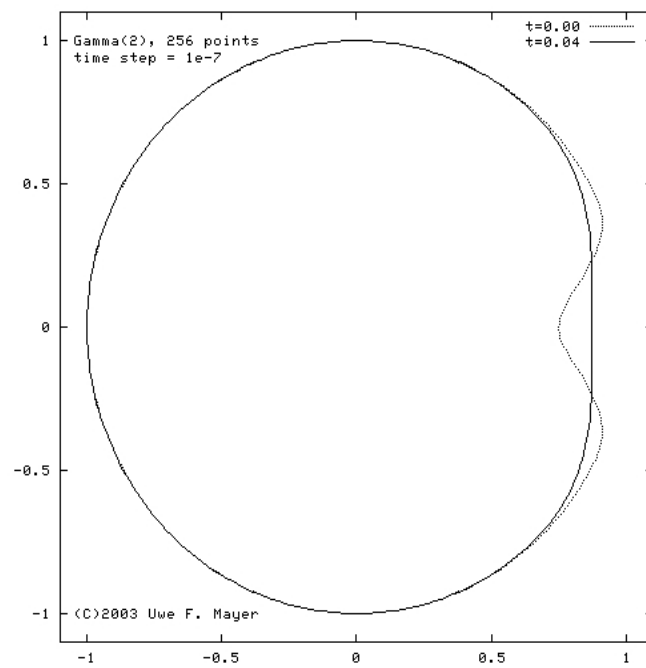
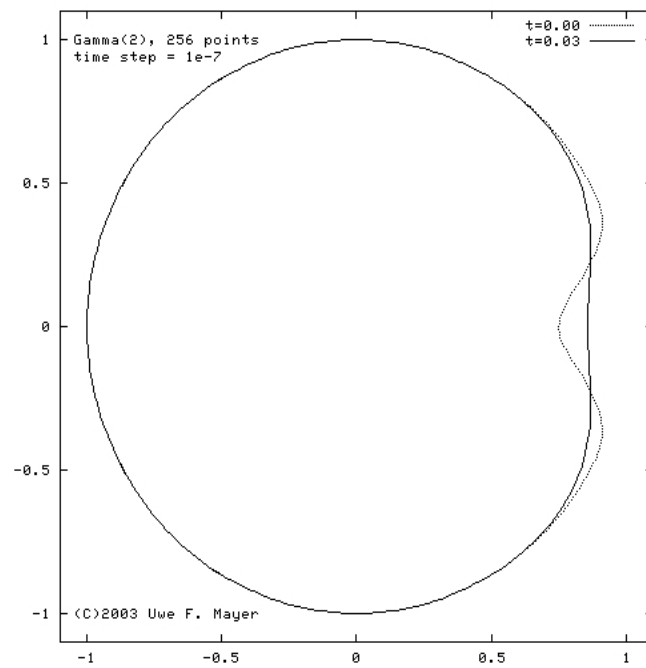


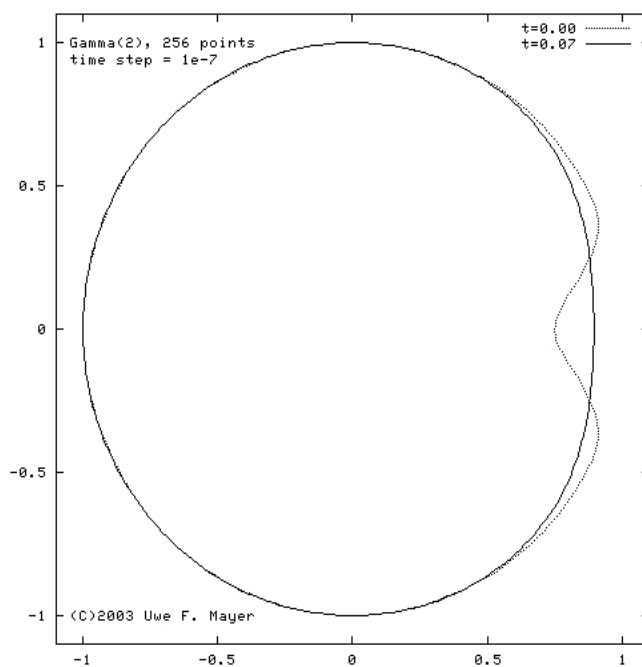
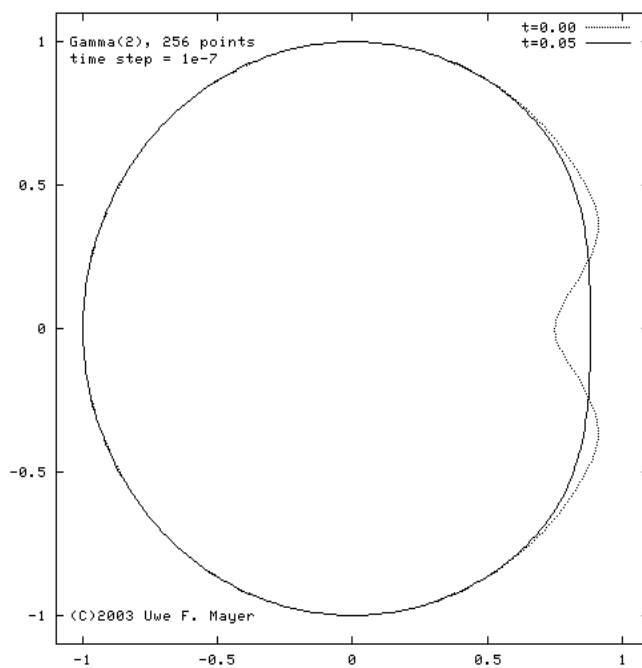
# Anhang A

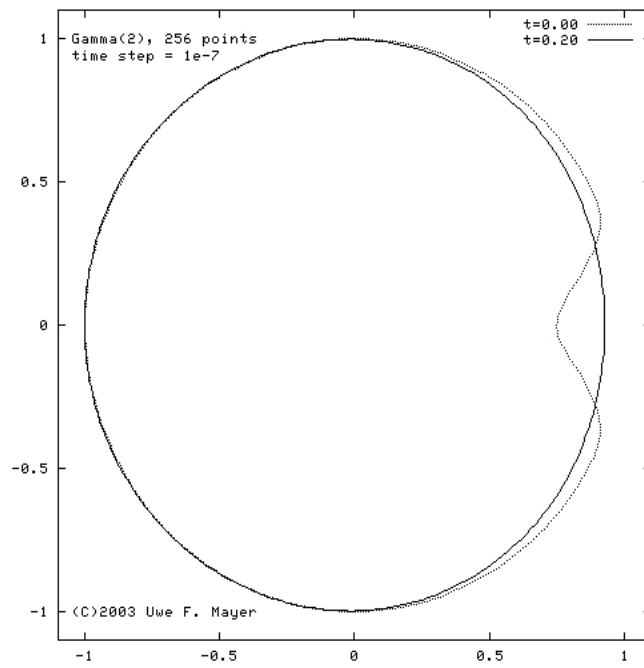
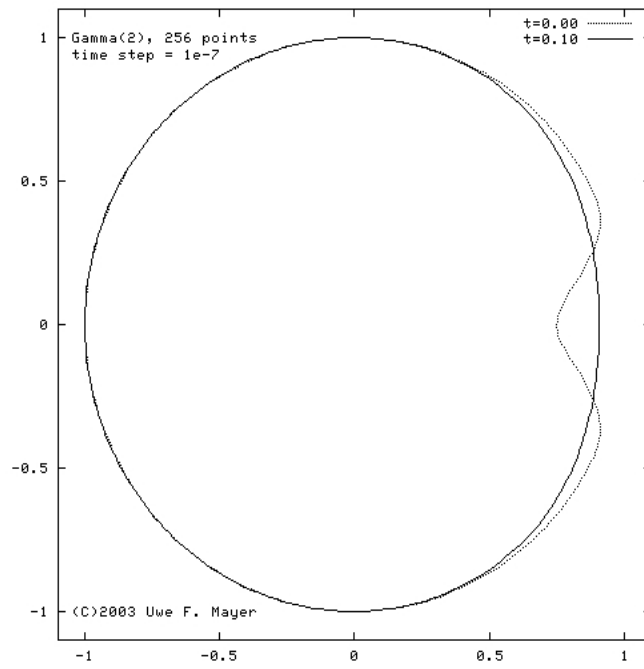
## Eine numerische Simulation

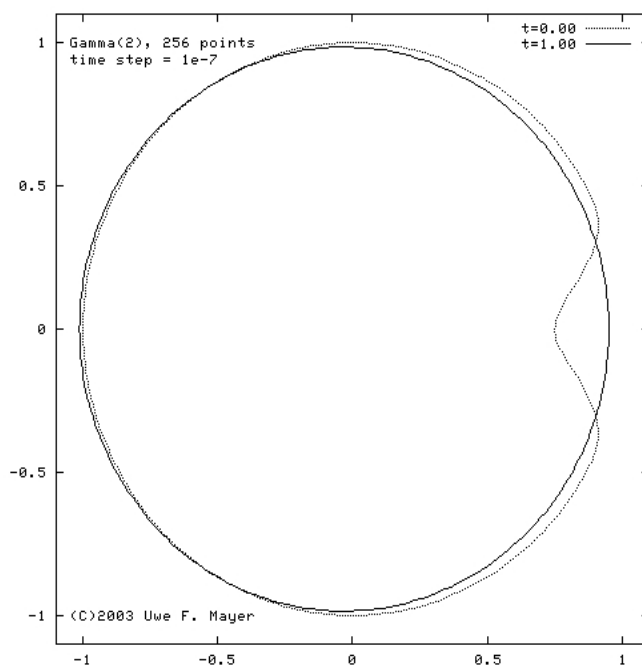
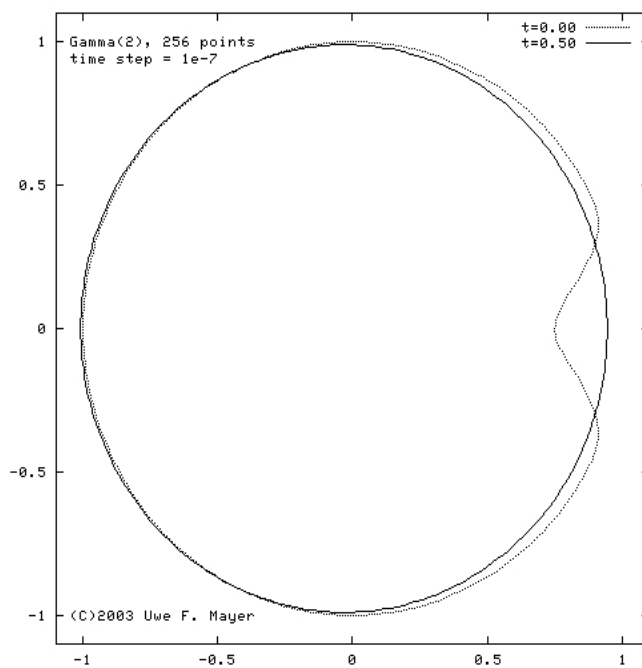
Auf den folgenden Grafiken ist eine numerische Simulation des gemittelten mittleren Krümmungsfluss mit Anfangsfläche  $\Gamma(0) = \Gamma_2$  (vgl. Abschnitt 4.2) zu sehen. Hierbei zeigt die gestrichelte Kurve jeweils die Anfangskurve  $\Gamma_2$  und die andere Kurve zeigt  $\Gamma(t)$  für verschiedene  $t > 0$ . Die numerische Simulation beruht auf einem semi-impliziten Finite-Differenzen Verfahren in der Zeit mit polygonaler Approximation der Kurve. Für Details verweisen wir auf [12].













# Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, J. Escher. *Analysis II*. Birkhäuser-Verlag, 1999.
- [2] H. Amann, J. Escher. *Analysis III*. Birkhäuser-Verlag, 2000.
- [3] L. Conlon. *Differentiable Manifolds A First Course*. Birkhäuser-Verlag 1993.
- [4] J. Escher, G. Simonett. Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension. *Adv. Differential Equations* **2** (619 - 642), 1997.
- [5] J. Escher, G. Simonett. A center manifold analysis for the Mullins-Sekerka model. *J. Differential Equations* **143** (267 - 292), 1998.
- [6] J. Escher, G. Simonett. The Volume Preserving Mean Curvature Flow Near Spheres. *Proc. AMS* **126** (2789-2796), 1998.
- [7] M. Gage. On an area-preserving evolution equation for plane curves. *Nonlinear Problems in Geometry*, D.M. DeTurck, editor, Contemp. Math. **51**, AMS, Providence (51-62), 1986.
- [8] J. Heine. *Topologie und Funktionalanalysis*, Oldenbourg-Verlag, 2002.
- [9] G. Huisken. The volume preserving mean curvature flow. *J. Reine Angew. Math.* **382** (35-48), 1987.
- [10] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.
- [11] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds An Curvature*. Springer-Verlag, 2003.
- [12] U. F. Mayer. A numerical scheme for free boundary problems that are gradient flows for the area functional. *Europ. J. Appl. Math.* **11** issue 2 (61-80), 2000.