

Übungen zur Funktionentheorie
Blatt 7

1. Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

2. Zeigen Sie, dass ein sternförmiges Gebiet einfach zusammenhängend ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3, Blatt 3)

3. Seien f und g holomorph auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $p \in D$. Weiter sei $g(p) = 0$, aber $g'(p) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ gilt: $\operatorname{Res}_p h = \frac{f(p)}{g'(p)}$.

4. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

5. Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

6. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen und $M \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Betrachte $U = M \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf U stetige Funktion, die auf $U \setminus (U \cap \mathbb{R})$ holomorph ist und für die gilt: $f(U \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die auf $U \cup \bar{U} = U \cup \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U\}$ definierte Funktion

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \in U \\ f(\bar{z}) & z \in \bar{U} \end{cases}$$

ist wohldefiniert und holomorph auf $U \cup \bar{U}$.

Abgabe: Freitag, den 9.6.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.