DEA de Mathématiques Pures
Université Denis Diderot (Paris VII)

Le Comportement Non-Récurrent dans la Dynamique Quantique; Le Rotateur Quantique

Firas Rassoul-Agha
sous la direction de Stephan De Bièvre

Abstract

Il s'agit dans ce mémoire d'étudier le mouvement du rotateur quantique, i.e. de l'opérateur de Schrödinger avec potentiel dépendant périodiquement du temps. On prouvera que le spectre de l'opérateur de la quasi-énergie est, généralement, continu dans le cas de résonance. On prouvera aussi que, pour un choix aléatoire du potentiel, il existe un très grand nombre de cas de non-résonance pour lesquels le spectre de la quasi-énergie est continu.

Mémoire de DEA — Juin 1996

I- Introduction

Le problème de stabilité des systèmes quantiques est l'un des problèmes importants de la Mécanique Quantique. Il est lié au "chaos quantique" et a de l'importance pour justifier les fondements de la Mécanique Quantique Statistique, et de le lier au comportement chaotique de certains systèmes classiques.

Dans ce but on utilise souvent le "rotateur quantique" comme modèle de recherche du mouvement chaotique quantique.

Cela consiste, en fait, à étudier l'opérateur

$$H(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\theta^2} + \mu V(\theta) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - 4\pi n\tau)$$

opérant sur les fonctions 2π-périodiques, L^2 sur le cercle unité C. On notera $L^2(C)$ l'ensemble de ces fonctions muni de la norme L^2 noté $\|\cdot\|$.

On suppose que V est une fonction analytique, 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\psi \in L^2(C)$ la fonction d'onde à $t = 0$ et notons ψ_t la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t\psi_t = H(t)\psi_t \\ \psi_0 = \psi \end{cases}$$

Alors entre $t = 0$ et $t = 4\pi\tau$ la fonction ψ se développe librement en $e^{-it\frac{P^2}{2}}\psi$. En $t = 4\pi\tau$ elle reçoit un "coup" $e^{-i\mu V(\theta)}$. Donc en $t = 4\pi\tau$ on aura $\psi_{4\pi\tau} = e^{-i\mu V(\theta)}e^{-2i\pi\tau P^2}\psi$.

On veut comprendre le comportement asymptotique de ψ_t lorsque t devient grand.

Notons

$$T_\tau = e^{-2i\pi\tau P^2}$$

$$S_\tau = e^{-i\mu V(\theta)}\, e^{-2i\pi\tau P^2}$$

En fait S_τ vient de l'intégration de l'équation de Schrödinger sur une période. Il est appelé l'opérateur de Floquet.

Comme ψ est 2π-périodique on peut écrire, dans $L^2(C)$, que

$$\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} T_\tau \psi(\theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi\tau n^2} e^{in\theta} \\ S_\tau \psi(\theta) &= e^{-i\mu V(\theta)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi\tau n^2} e^{in\theta} \end{aligned}$$

L'étude du spectre de S_τ nous permet de conclure des résultats sur le comportement asymptotique de l'énergie cinétique $< P^2 >_m = (\psi, S_\tau^{-m} P^2 S_\tau^m \psi)$ et de l'énergie cinétique moyenne

$$\overline{< P^2 >}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (\psi, S_\tau^{-k} P^2 S_\tau^k \psi)$$

quand m tend vers l'infini.

Si, par exemple, le spectre de S_τ est purement continu alors

$$\lim_{m \to \infty} < P^2 >_m = \infty$$

et si il est purement absolument continu alors il existe $C > 0$ tel que

$$\overline{< P^2 >}_m \geq C m^2$$

pour cela voir [RS III], [CFKS].

Définition : *On dit que S_τ est en résonance quand τ est un nombre rationnel.*

Pour un réel α strictement positif considérons l'ensemble $\mathcal{B}_\alpha$ des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodiques de période 2π, analytiques sur le cercle unité C, et qui ont un prolongement analytique dans l'ensemble $C_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |\operatorname{Im} z| < \alpha\}$, continu dans $\overline{C_\alpha}$. C'est un espace de Banach de norme $\|\psi\|_\alpha = \max\{|\psi(z)| : z \in \overline{C_\alpha}\}$.

On va montrer deux théorèmes sur la nature du spectre de S_τ.

Théorème 1 dit que “typiquement” les S_τ en résonance ont un spectre continu.

THÉORÈME : *Pour tout réel α strictement positif, l'ensemble des potentiels $V \in \mathcal{B}_\alpha$ tels que S_τ, en résonance, possède un spectre purement continu contient une intersection d'ouverts denses dans $\mathcal{B}_\alpha$ muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$.*
Dans ce cas on dit qu'il y a un ensemble générique de potentiels V qui vérifient cette propriété.

Mais pour des raisons physiques on s'intéresse plus aux cas de non-résonance car c'est là où apparaît le mouvement chaotique.

Pour $\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$ posons

$$K(\psi) = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\, c_n \,|^2$$

et pour $E > 0$ on notera

$$\sigma_E = \left\{ \psi \in L^2(C)\,;\ \|\psi\| = 1,\ K(\psi) \leq E \right\}$$

Théorème 2 nous dit alors que pour “la plupart des potentiels” il existe “beaucoup” de cas de non-résonance où le spectre de S_τ est continu.

THÉORÈME : *Il existe un ensemble générique de potentiels V tel que pour tout tel V il existe un ensemble générique d'irrationnels $\tau \in]0,1[$ tels que le spectre de S_τ soit continu.*

En fait, on prouvera dans ce mémoire qu'il existe un ensemble générique de potentiels V pour les quels il existe des $\tau \in]0,1[$ irrationnels tels que σ_E soit inclut dans les espaces propres continus des S_τ, et cela pour tout $E > 0$. La preuve du théorème 2 s'en déduit aussitôt.

On se doute même que le spectre de S_τ dans le cas de non-résonance est singulièrement continu. On suppose même que l'apparition de ce genre de spectres caractérise le mouvement chaotique.

Passons maintenant aux démonstrations de ces deux théorèmes.

II- Preuve du Théorème 1

Supposons maintenant que S_τ est bien en résonance. Donc $\tau = p/q$, pour (p, q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Essayons de réduire S_τ en une somme de matrices.

Pour cela notons $I_q = [0, \frac{2\pi}{q}[$ et considérons l'opérateur unitaire

$$\begin{aligned} U : L^2(C) &\longrightarrow L^2(I_q, \mathbb{C}^q, d\theta) \\ (U\psi)(\theta) &= \left(\psi(\theta + \frac{2\pi k}{q})\right)_{0\leq k\leq q-1} \end{aligned}$$

Remarque : On dit que $U\psi$ est un "q-vecteur".

On a alors le lemme suivant.

Lemme : *Pour tout θ dans I_q on peut trouver une matrice unitaire $S_{\tau,\theta}$ dans $M_q(\mathbb{C})$ telle que*

$$(US_\tau\psi)(\theta) = S_{\tau,\theta}(U\psi)(\theta)$$

de plus $S_{\tau,\theta} = W_\theta \Gamma_\tau$, où $(W_\theta)_{kl} = e^{-i\mu V(\theta+\frac{2\pi k}{q})}\delta_{kl}$ et Γ_τ est une matrice dans $M_q(\mathbb{C})$, unitaire, de spectre $\{\nu_n = e^{-2i\pi\tau n^2} \ : \ 0 \leq n \leq q-1\}$ dont les vecteurs propres respectifs sont $\{u_n = \left(e^{\frac{2i\pi kn}{q}}\right)_{0\leq k\leq q-1} \ : \ 0 \leq n \leq q-1\}$

Preuve :

En fait, on cherche $S_{\tau,\theta}$ telle que, pour tout θ dans I_q on ait

$$\sum_{l=0}^{q-1} (S_{\tau,\theta})_{kl}\, \psi(\theta + \frac{2\pi l}{q}) = S_\tau\psi(\theta + \frac{2\pi k}{q})$$

autrement dit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \left(\sum_{l=0}^{q-1} (S_{\tau,\theta})_{kl}\, e^{\frac{2i\pi l n}{q}} \right) e^{in\theta} = e^{-i\mu V(\theta+\frac{2\pi k}{q})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi\tau n^2} e^{\frac{2i\pi k n}{q}} e^{in\theta}$$

donc cela revient à chercher $S_{\tau,\theta}$ telle que

$$\sum_{l=0}^{q-1} (S_{\tau,\theta})_{kl}\, e^{\frac{2i\pi l n}{q}} = e^{-i\mu V(\theta+\frac{2\pi k}{q})} e^{-2i\pi\tau n^2} e^{\frac{2i\pi k n}{q}}$$

Posons $S_{\tau,\theta} = W_\theta\, \Gamma_{\tau,\theta}$ avec

$$(W_\theta)_{kl} = e^{-i\mu V(\theta+\frac{2\pi k}{q})}\delta_{kl}$$

alors on a

$$(S_{\tau,\theta})_{kl} = e^{-i\mu V(\theta+\frac{2\pi k}{q})}(\Gamma_{\tau,\theta})_{kl}$$

Finalement on obtient que l'existence de $S_{\tau,\theta}$ équivaut à celle de $\Gamma_{\tau,\theta}$ telle que

$$\sum_{l=0}^{q-1} (\Gamma_{\tau,\theta})_{kl}\, e^{\frac{2i\pi l n}{q}} = e^{-2i\pi\tau n^2} e^{\frac{2i\pi k n}{q}} \tag{$*$}$$

pour tout θ dans I_q.

Remarque : On voit bien que les seules valeurs intéressantes de n sont $0, 1, \cdots, q-1$.

$\Gamma_{\tau,\theta}$ est, si elle existe, une matrice indépendante de θ, on la notera Γ_τ.

De plus Γ_τ existe car

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2i\pi}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi k}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2i\pi n}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi k n}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi(q-1)n}{q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi k(q-1)}{q}} & \cdots & e^{\frac{2i\pi(q-1)^2}{q}} \end{bmatrix} = \prod_{0\le k<k'\le q-1} \left(e^{\frac{2i\pi k}{q}} - e^{\frac{2i\pi k'}{q}} \right) \neq 0$$

On peut aussi la calculer explicitement par une transformée de Fourier discrète. En multipliant $(*)$ par $e^{-\frac{2i\pi nm}{q}}$ et en faisant la somme sur n de 0 à $q-1$ et en remarquant que si $|\,s\,| < q$ on a

$$\sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi ns}{q}} = q\delta_{0s}$$

on trouve que

$$(\Gamma_{\tau,\theta})_{km} = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{q-1} e^{-2i\pi\tau n^2} e^{\frac{2i\pi(k-m)n}{q}}$$

Et $(*)$ nous montre aussi que le spectre de Γ_τ est $\{\nu_n = e^{-2i\pi\tau n^2} \,:\, 0 \le n \le q-1\}$, et que les vecteurs propres correspondant sont les q vecteurs $u_n = \left(e^{\frac{2i\pi kn}{q}}\right)_{0\le k\le q-1}$, pour n variant entre 0 et $q-1$.

Elle est, en plus, unitaire car

$$(u_n, u_m) = \sum_{k=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi k(n-m)}{q}} = q\delta_{nm}$$

et

$$\begin{aligned}(\overline{{}^t\Gamma_\tau}\Gamma_\tau u_n, u_m) &= (\Gamma_\tau u_n, \Gamma_\tau u_m) = \nu_n\overline{\nu_m}(u_n, u_m) = \nu_n\overline{\nu_m}q\delta_{nm}\\ &= |\,\nu_n\,|^2 q\delta_{nm} = q\delta_{nm} = (u_n, u_m)\end{aligned}$$

donc $\overline{{}^t\Gamma_\tau}\Gamma_\tau = I$.

□

Remarque : Le passage aux q-vecteurs est souvent exprimé par la notation

$$L^2(C) = \int_0^{\frac{2\pi}{q}} L^2(I_q, \mathbb{C}^q)d\theta$$
$$S_\tau = \int_0^{\frac{2\pi}{q}} S_{\tau,\theta}d\theta$$

Remarque : Désormais $U\psi$ sera aussi noté ψ.

On verra plus loin que les valeurs propres de S_τ parviennent des valeurs propres de $S_{\tau,\theta}$ constantes sur un sous-ensemble de I_q de mesure non-nulle.

On peut montrer [IS] qu'il existe au moins une valeur propre non-constante donc que le spectre continu n'est pas vide. Mais dans ce mémoire on s'intéresse aux cas où S_τ a un spectre purement continu.

Avant de commencer la démonstration du théorème 1 on aura besoin de quelques lemmes et définitions préliminaires.

Définition : *Le résultant de deux polynômes*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
$$Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

est le déterminant de la matrice $(n+m) \times (n+m)$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & & 0 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_n & & \ddots & a_0 & b_{m-1} & & b_1 \\ 0 & a_n & & a_1 & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

Lemme : *Un polynôme P a des racines multiples si, et seulement si, le résultant de P et P' est nul.*

Remarque : Ce lemme est un résultat simple de l'Algèbre [J].

Remarquons maintenant que, pour tout τ fixé, la matrice $S_{\tau,0}$ est complètement déterminée par $((V(\frac{2\pi j}{q}))_{0\leq j\leq q-1}$. On peut ainsi définir $S_{\tau,0}(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$, pour tout $(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$, comme étant la matrice $S_{\tau,0}$ correspondante au potentiel V tel que $V(\frac{2\pi j}{q}) = V_j$ pour $j \in [0, q[\cap \mathbb{N}$.

Alors "dans la plus part des cas" $S_{\tau,0}$ est sans multiplicités.

Le lemme suivant donne un sens mathématique à ce qu'on vient d'affirmer.

LEMME : *L'ensemble des* $(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ *tels que* $S = S_{\tau,0}(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ *soit sans valeurs propres dégénérées est un ouvert dense de* $\mathbb{R}^q$.

PREUVE :

Soit $P(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ le polynôme caractéristique de S. Alors P a des racines multiples si, et seulement si, le résultant $G(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ de P et de P' s'annule.

D'autre part G est une fonction analytique de $(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ car les coefficients de P le sont. Donc l'ensemble des $(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ tels que $S = S_{\tau,0}(V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})$ soit sans valeurs propres dégénérées est un ouvert puisque c'est le complémentaire de $G^{-1}(\{0\})$.

Posons maintenant $v_j = \dfrac{2\pi j}{\mu q}$, pour $j = 0, \cdots, q-1$. Et rappelons nous que la matrice Γ_τ a q vecteurs propres u_j associés aux valeurs propres ν_j.

Remarquons maintenant que si on note $S_0 = S_{\tau,0}(v_0, v_1, \cdots, v_{q-1})$ alors on aura

$$S_0 u_j = \nu_j u_{j-1}$$

$$S_0 u_0 = \nu_0 u_{q-1}$$

Alors la matrice de S_0 dans la base $\{u_j\}_{0 \le j \le q-1}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \nu_{q-1} \\ \nu_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et on conclut à

$$\det(S_0 - \lambda I) = (-\lambda)^q + (-1)^{q-1} \prod_{j=0}^{q-1} \nu_j$$

donc les valeurs propres de S_0 sont les racines q-ièmes de $\displaystyle\prod_{j=0}^{q-1} \nu_j$, et par conséquent

$$G(v_0, v_1, \cdots, v_{q-1}) \neq 0$$

Supposons maintenant que S présente des dégénérescences et posons

$$\begin{aligned} h(t) =& (V_0(t), V_1(t), \cdots, V_{q-1}(t)) \\ =& (v_0, v_1, \cdots, v_{q-1})t + (V_0, V_1, \cdots, V_{q-1})(1-t) \end{aligned}$$

Or G est analytique, $G \circ h$ est aussi une fonction analytique, non-identiquement nulle, et qui présente un zéro en $t = 0$. Donc ce zéro doit être isolé et

$$G(V_0(t), V_1(t), \cdots, V_{q-1}(t)) \neq 0$$

pour tout t assez proche de 0. Ce qui nous prouve bien la densité de l'ensemble en question.

□

Montrons maintenant quelques lemmes en vue d'étudier l'influence des perturbations d'une matrice sur ses valeurs et vecteurs propres.

Commençons par un lemme sur l'influence des perturbations sur les valeurs propres.

Lemme : *Soit $M : U \subset \mathbb{R}^d (ou\ \mathbb{C}^d) \longrightarrow M_q(\mathbb{C})$ une fonction analytique. Alors si λ_0 est une valeur propre simple de $M(\theta_0)$, pour $\theta_0 \in U$, il existe une unique valeur propre $\lambda(\theta)$ de $M(\theta)$, et cela pour tout θ assez proche de θ_0. De plus λ est analytique au voisinage de θ_0.*

Preuve :

En fait, si $P(x, \theta)$ est la fonction polynômiale caractéristique de $M(\theta)$ alors on a

$$P(x, \theta) = \sum_{k=0}^{q} a_k(\theta)(x - \lambda_0)^k$$

avec a_k analytique.

Et la simplicité de λ_0 implique

$$P(\lambda_0, \theta_0) = 0\ , \quad \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda_0, \theta_0) = a_1(\theta_0) \neq 0$$

donc le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'un voisinage $\Lambda \times \Theta$ de (λ_0, θ_0) et d'une fonction analytique $\lambda(\theta)$ telle que, pour tout θ proche de θ_0, on a

$$\begin{cases} \forall \theta \in \Theta \quad : \quad P(\lambda(\theta), \theta) = 0 \\ \forall (x, \theta) \in \Lambda \times \Theta \quad : \quad P(x, \theta) = 0 \Longrightarrow x = \lambda(\theta) \end{cases}$$

ce qui veut exactement dire que, pour tout θ dans Θ, $\lambda(\theta)$ est l'unique valeur propre de $M(\theta)$ proche de λ_0.

□

Pour étudier les vecteurs propres des matrices perturbées il nous faudra d'abord étudier la régularité de la résolvante en fonction du paramètre θ.

Lemme : *Pour la même M que dans le lemme précédent $(M(\theta) - \lambda I)$ est biholomorphe en (λ, θ) au voisinage de tout (λ_0, θ_0) tel que $(M(\theta_0) - \lambda_0 I)$ soit inversible.*

Preuve :

On a bien

$$\begin{aligned} M(\theta) - \lambda I =& M(\theta_0) - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I + (M(\theta) - M(\theta_0)) \\ =& \left(I - ((\lambda - \lambda_0)I - (M(\theta) - M(\theta_0)))\, (M(\theta_0) - \lambda_0 I)^{-1}\right) (M(\theta_0) - \lambda_0 I) \end{aligned}$$

donc $M(\theta) - \lambda I$ est inversible quand

$$|\, \lambda - \lambda_0 \,| + \|M(\theta) - M(\theta_0)\| < \|M(\theta_0) - \lambda_0 I\| \neq 0$$

or $M(\theta) - \lambda I$ est holomorphe en (λ, θ), il est donc biholomorphe au voisinage de (λ_0, θ_0).

□

Le lemme suivant donne un sens à la recherche des vecteurs propres des matrices perturbées.

Lemme : *Toujours pour la même M si λ_0 est une valeur propre simple de $M(\theta_0)$ alors on peut trouver, pour tout θ proche de θ_0, un vecteur propre $x(\theta)$ de $M(\theta)$ correspondant à $\lambda(\theta)$, la valeur propre de $M(\theta)$, et tel que x soit analytique au voisinage de θ_0.*

Preuve :

Comme λ_0 est simple on peut grâce au lemme précédent trouver ε, strictement positif, tel que pour tout θ assez proche de θ_0, la boule $B(\lambda_0, \varepsilon)$ ne contienne aucune autre valeur propre de $M(\theta)$ que $\lambda(\theta)$.

Dans ce cas

$$P(\theta) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{S(\lambda_0,\varepsilon)} (M(\theta) - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

est la projection sur l'espace propre de $M(\theta)$ lié à $\lambda(\theta)$.

Et si x_0 est un vecteur propre de $M(\theta_0)$ correspondant à λ_0 alors $P(\theta)x_0$ est analytique, donc continue, et prend la valeur $x_0 \neq 0$ en θ_0.

Il existe donc un voisinage de θ_0 où $P(\theta)x_0$ ne s'annule pas et, par conséquent, $x(\theta) = P(\theta)x_0$ est un vecteur propre analytique de $M(\theta)$ lié à $\lambda(\theta)$.

□

On peut maintenant s'attaquer à la preuve du théorème 1.

Preuve (Du Théorème 1)

Fixons, pour l'instant, $\tau = p/q$ et supposons, provisoirement, que $S_{\tau,0}$ est à valeurs propres simples.

Soit λ une valeur propre de S_τ. Alors il existe $\psi \in L^2(C)$ pour laquelle $S_\tau \psi = \lambda\psi$. Or ψ est non-nulle sur un sous-ensemble J de I_q de mesure non-nulle, donc λ est dans l'ensemble $\Lambda(S_{\tau,\theta})$ des valeurs propres de $S_{\tau,\theta}$ pour tout θ dans J.

Autrement dit, le polynôme caractéristique $\chi_{S_{\tau,\theta}}$ s'annule en λ pour θ dans un ensemble de mesure non-nulle. Or $\chi_{S_{\tau,\theta}}(\lambda)$ est analytique en θ, il est identiquement nul et λ est une valeur propre de $S_{\tau,\theta}$ pour tout θ dans I_q.

Remarque : En plus le résultant de $\chi_{S_{\tau,\theta}}$ et de $\chi'_{S_{\tau,\theta}}$ est analytique en θ. Or il ne s'annule pas en zéro, donc l'ensemble des θ tels que $S_{\tau,\theta}$ a des dégénérescences est constitué de points isolés et est donc négligeable. On ne se servira pas de cette remarque dans la suite. Elle peut néanmoins éclaircir un peu le comportement des valeurs propres de $S_{\tau,\theta}$.

En particulier λ est une valeur propre simple de $S_{\tau,0}$. Le lemme précédent nous permet donc de trouver, au voisinage de zéro, un q-vecteur propre $x(\theta)$ de $S_{\tau,\theta}$, analytique. Et cela à partir d'un vecteur propre $x(0)$ de $S_{\tau,0}$.

On a alors, pour θ petit, $S_{\tau,\theta}\, x(\theta) = \lambda x(\theta)$ et, en dérivant au voisinage de zéro par rapport à θ, on trouve

$$\dot{S}_{\tau,\theta}\, x(\theta) + S_{\tau,\theta}\, \dot{x}(\theta) = \lambda \dot{x}(\theta)$$

ou encore

$$(\lambda - S_{\tau,\theta})\dot{x}(\theta) = \dot{S}_{\tau,\theta}\, x(\theta) = \dot{W}_\theta \Gamma_\tau x(\theta) = M_\theta S_{\tau,\theta}\, x(\theta) = \lambda M_\theta x(\theta)$$

où

$$(M_\theta)_{mn} = -i\mu V'\left(\theta + \frac{2\pi m}{q}\right)\delta_{mn}$$

Or $|\,\lambda\,| = 1$ on a pour tout $\theta \in I_q$

$$\begin{aligned}(M_\theta x(\theta), x(\theta)) &= (\lambda M_\theta x(\theta), \lambda x(\theta)) = ((\lambda - S_{\tau,\theta})\dot{x}(\theta), \lambda x(\theta)) \\ &= (\dot{x}(\theta), x(\theta) - \overline{{}^tS_{\tau,\theta}} S_{\tau,\theta} x(\theta))\end{aligned}$$

mais

$$\overline{{}^tS_{\tau,\theta}} S_{\tau,\theta} = \overline{{}^t\Gamma_\tau {}^tW_\theta} W_\theta \Gamma_\tau = \overline{{}^t\Gamma_\tau}\Gamma_\tau = I$$

donc $(M_\theta x(\theta), x(\theta)) = 0$. En particulier pour $\theta = 0$ on a

$$\sum_{j=0}^{q-1} V'\left(\frac{2\pi j}{q}\right) |\, x_j(0)\,|^2 = 0$$

En voilà une condition nécessaire pour que λ soit une valeur propre de S_τ. Il suffit donc de montrer qu'il existe un ensemble générique de potentiels dans $\mathcal{B}_\alpha$ ne causant pas des dégénérescences de $S_{\tau,0}$ et ne vérifiant pas cette condition pour tout vecteur propre $x(0)$ de $S_{\tau,0}$.

Soit D l'ensemble des $(V_0, \cdots, V_{q-1}, V'_0, \cdots, V'_{q-1}) \in \mathbb{R}^{2q}$ tels que $S_{\tau,0}(V_0, \cdots, V_{q-1})$ soit à valeurs propres simples. Alors un lemme précédent nous dit que D est un ouvert dense.

$S_{\tau,0} : D \longrightarrow M_q(\mathbb{C})$ est analytique et son image est constituée de matrices à valeurs propres non-dégénérées. Il existe donc, d'après les lemmes sur les valeurs propres, des fonctions $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$, analytiques en $(V_0, \cdots, V_{q-1}, V'_0, \cdots, V'_{q-1})$, qui sont les valeurs propres de $S_{\tau,0}(V_0, \cdots, V_{q-1}, V'_0, \cdots, V'_{q-1}) = S_{\tau,0}(V_0, \cdots, V_{q-1})$. Il existe aussi des q-vecteurs $x^1(0), \cdots, x^q(0)$, analytiques en $(V_0, \cdots, V_{q-1}, V'_0, \cdots, V'_{q-1})$, qui sont des vecteurs propres correspondant, respectivement, aux $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$.

Remarque : On construit les λ_k et les $x^k(0)$ en recollant les fonctions que l'on obtient localement grâce aux lemmes précédents. En effet, il est facile de recoller les morceaux sur un compact connexe. Après cela il suffit d'écrire chaque composante connexe de D comme une réunion croissante de compacts connexes.

Considérons dans ce cas les fonctions analytiques

$$f_k : D \longrightarrow \mathbb{R} : (V_0, \cdots, V_{q-1}, V'_0, \cdots, V'_{q-1}) \mapsto \sum_{j=0}^{q-1} V'_j \left| x_j^k(0) \right|^2 \quad ; \quad 1 \leq k \leq q$$

alors $X_{p,q} = \bigcap_{k=1}^{q} f_k^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert.

D'autre part on a bien

$$V(\frac{2\pi j}{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\frac{2\pi j}{q} + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

$$V'(\frac{2\pi j}{q}) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} V(\frac{2\pi j}{q} + \rho e^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta$$

ρ étant assez petit.

Ce qui donne

$$\begin{cases} \left| V(\frac{2\pi j}{q}) \right| \leq \|V\|_\alpha \\ \\ \left| V'(\frac{2\pi j}{q}) \right| \leq \frac{1}{\rho} \|V\|_\alpha \end{cases}$$

d'où la continuité de $\mathcal{B}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^2 : V \mapsto (V(\frac{2\pi j}{q}), V'(\frac{2\pi j}{q}))$.

Donc l'ensemble $X_{p,q,\alpha}$ des $V \in \mathcal{B}_\alpha$ tels que

$$(V(0), \cdots, V(\frac{2\pi(q-1)}{q}), V'(0), \cdots, V'(\frac{2\pi(q-1)}{q})) \in X_{p,q}$$

est un ouvert dans $(\mathcal{B}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

En plus $X_{p,q,\alpha}$ est dense car, grâce à un lemme précédent, étant donné un potentiel $V \in \mathcal{B}_\alpha$ on peut, d'abord, rendre $S_{\tau,0}$ sans multiplicités, par une perturbation infiniment petite de V. Après cela si, pour une certaine valeur propre λ_k de $S_{\tau,0}$, f_k s'annule alors on remplace le nouveau $\bar{V}$ par $\bar{V} + \varepsilon \sin q\theta$. On laisse ainsi $S_{\tau,0}$, donc les $x^k(0)$ aussi, inchangé ; quant aux f_k on a

$$f_k(\bar{V} + \varepsilon \sin q\theta) = f_k(\bar{V}) + \varepsilon \left\|x^k(0)\right\|^2$$

où on a noté $f_k(V)$ pour $f_k(V(0), \cdots, V(\frac{2\pi(q-1)}{q}), V'(0), \cdots, V'(\frac{2\pi(q-1)}{q}))$.

Alors si avant la perturbation on avait $f_k(\bar{V}) = 0$ cela ne reste plus vrai après la perturbation car les $x^k(0)$ sont des vecteurs propres, donc non-nuls.

Et si on pose

$$\varepsilon_0 = \inf \left\{ \frac{|\, f_k(\bar{V})\,|}{\|x_k(0)\|^2} \; : \; 1 \leq k \leq q \, , \, f_k(\bar{V}) \neq 0 \right\} > 0$$

alors pour tout $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ strictement positif on a $f_k(\bar{V} + \varepsilon \sin q\theta) \neq 0$, et cela pour tout k.

Et comme $\|\sin qz\|_\alpha \leq 1$ le nouveau potentiel est aussi proche de V que l'on veut. D'où la densité de $X_{p,q,\alpha}$.

Si l'on considère maintenant l'ensemble $X_\alpha = \bigcap_{p,q} X_{p,q,\alpha}$; alors pour tout $V \in X_\alpha$ et pour tout $\tau \in \mathbb{Q}$, $S_{\tau,\theta}$ ne peut avoir aucune valeur propre constante. Or on a montré, tout au début de cette preuve, que les valeurs propres de S_τ sont en fait des valeurs propres constantes de $S_{\tau,\theta}$. Alors S_τ a un spectre purement continu.

X_α étant une intersection dénombrable d'ouverts denses. Cela termine la preuve du théorème 1.

□

III- Preuve du Théorème 2

Dans cette partie τ n'est plus un rationnel mais un réel quelconque.

Commençons par quelques lemmes nécessaire pour la preuve du théorème 2.

LEMME : *(Théorème de Wiener)*

Soit S un opérateur unitaire sur $L^2(C)$. Alors si son spectre est purement continu on a pour tout ψ dans $L^2(C)$

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{R}(N,\psi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \left|\,(S^k\psi,\psi)\,\right|^2 = 0$$

PREUVE :

En fait

$$(S^k\psi,\psi) = \int_0^{2\pi} e^{ik\lambda}\; d < E_\lambda\psi,\psi >$$

où E_λ est la mesure spectrale de S. Donc

$$\mathcal{R}(N,\psi) = \iint_{[0,2\pi]^2} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{ik(\lambda-\mu)}\; d < E_\lambda\psi,\psi > d < \psi, E_\mu\psi >$$

$$= \iint_{[0,2\pi]^2} \frac{e^{i(N+1)(\lambda-\mu)} - e^{i(\lambda-\mu)}}{N\left(e^{i(\lambda-\mu)}-1\right)}\; d < E_\lambda\psi,\psi > d < \psi, E_\mu\psi >$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{R}(N,\psi) = \iint_{[0,2\pi]^2} \chi_{\lambda=\mu}(\lambda,\mu)\; d < E_\lambda\psi,\psi > d < \psi, E_\mu\psi >$$

$$= \int_0^{2\pi} < E_\lambda\psi,\psi > (\{\lambda\})\; d < E_\lambda\psi,\psi > = 0$$

□

Rappelons que pour $\psi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$

$$K(\psi) = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\, c_n \,|^2$$

et que pour $E > 0$

$$\sigma_E = \big\{\psi \in L^2(C)\,;\, \|\psi\| = 1,\ K(\psi) \leq E\big\}$$

Alors on a le lemme suivant.

LEMME : *Pour tout $E > 0$ σ_E est compact.*

PREUVE :

Il suffit de montrer que toute suite de σ_E possède une sous-suite convergente dans σ_E [RS I].

Soit $(\psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de σ_E et soit $c_n(N)$ le n-ième coefficient de Fourier de ψ_N.

Alors $(c_0(N))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée par un car $\|\psi_N\| = 1$. Donc elle possède une sous-suite $(c_0(\varphi_0(N)))_{N\in\mathbb{N}}$ convergente vers une limite c_0. De même, $(c_{-1}(\varphi_0(N)))_{N\in\mathbb{N}}$ et $(c_1(\varphi_0(N)))_{N\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux bornées donc il existe une injection strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \varphi_0(\mathbb{N})$ telle que $(c_{-1}(\varphi_1(N)))_{N\in\mathbb{N}}$ et $(c_1(\varphi_1(N)))_{N\in\mathbb{N}}$ convergent vers, respectivement, c_{-1} et c_1.

On peut ainsi construire une suite $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ d'injections strictement croissantes telles que

$$\begin{cases} \forall N \in \mathbb{N}^* \ : \ \varphi_N(\mathbb{N}) \subset \varphi_{N-1}(\mathbb{N}) \\ \forall n \in \mathbb{Z} \ : \ \big(c_n(\varphi_{|\,n\,|}(N))\big)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } c_n \end{cases}$$

Posons maintenant $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : \varphi(N) = \varphi_N(N)$. Alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \ : \ \varphi(N+1) = \varphi_{N+1}(N+1) > \varphi_{N+1}(N)$$

Montrons, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_{N+1}(n) \geq \varphi_N(n)$$

Pour $n = 0$ on a

$$\varphi_{N+1}(0) = \min \varphi_{N+1}(\mathbb{N}) \geq \min \varphi_N(\mathbb{N}) = \varphi_N(0)$$

Supposons que $\varphi_{N+1}(n) \geq \varphi_N(n)$ et montrons que $\varphi_{N+1}(n+1) \geq \varphi_N(n+1)$.

L'hypothèse de récurrence nous donne

$$\varphi_{N+1}(\mathbb{N} \cap]n, \infty[) \subset \varphi_N(\mathbb{N} \cap]n, \infty[)$$

car pour $m > n$ on a

$$\varphi_{N+1}(m) > \varphi_{N+1}(n) \geq \varphi_N(n)$$

d'autre part $\varphi_{N+1}(m) \in \varphi_{N+1}(\mathbb{N}) \subset \varphi_N(\mathbb{N})$ donc on a bien

$$\varphi_{N+1}(m) = \varphi_N(m') > \varphi_N(n)$$

ce qui implique que $m' > n$ et que $\varphi_{N+1}(m) \in \varphi_N(\mathbb{N} \cap]n, \infty[$. Donc

$$\varphi_{N+1}(n+1) = \min \varphi_{N+1}(\mathbb{N} \cap]n, \infty[) \geq \min \varphi_N(\mathbb{N} \cap]n, \infty[) = \varphi_N(n+1)$$

ce qui prouve qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{N+1}(n) \geq \varphi_N(n)$$

et, par conséquent, que

$$\varphi(N+1) > \varphi_{N+1}(N) \geq \varphi_N(N) = \varphi(N)$$

donc que φ est strictement croissante.

D'autre part si $N \geq |\, n \,|$ on a

$$\varphi(N) = \varphi_N(N) \in \varphi_N(\mathbb{N}) \subset \varphi_{|\, n\,|}(\mathbb{N})$$

donc

$$\varphi([|\, n \,|, \infty[\cap \mathbb{N}) \subset \varphi_{|\, n \,|}(\mathbb{N})$$

et $(c_n(\varphi(N)))_{N \geq |\, n \,|}$ est une sous-suite de $\left(c_n(\varphi_{|\, n \,|}(N))\right)_{N \in \mathbb{N}}$.

Et on a bien

$$\lim_{N\to\infty} c_n(\varphi(N)) = c_n$$

or pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|\, c_n(\varphi(N))\,|^2 \leq \frac{E}{\pi n^2}$$

on obtient $|\, c_n\,|^2 \leq \dfrac{E}{\pi n^2}$ et

$$|\, c_n(\varphi(N)) - c_n\,|^2 \leq \frac{4E}{\pi n^2}$$

le théorème de la convergence dominée nous donne

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\, c_n(\varphi(N)) - c_n\,|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{N\to\infty} |\, c_n(\varphi(N)) - c_n\,|^2 = 0$$

Donc si on pose $\psi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$ on a

$$\lim_{N\to\infty} \psi_{\varphi(N)} = \psi$$

avec $\|\psi\| = 1$ car pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\|\psi_N\| = 1$.

Il nous reste à montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\, c_n\,|^2 \leq \dfrac{E}{\pi}$.

Supposons que le contraire soit vrai, alors il existe un n_0 pour lequel

$$\sum_{|\,k\,|\leq n_0} k^2 |\, c_k\,|^2 > \frac{E}{\pi}$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|\,k\,|\leq n} k^2 |\, c_k(\varphi(N))\,|^2 = \sum_{|\,k\,|\leq n} k^2 |\, c_k\,|^2$$

alors pour N assez grand on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |\, c_k(\varphi(N))\,|^2 \geq \sum_{|\,k\,|\leq n_0} k^2 |\, c_k(\varphi(N))\,|^2 > \frac{E}{\pi}$$

ce qui est absurde. Donc ψ est bien dans σ_E et σ_E est compact.

$\square$

Rappelons l'un des lemmes les plus puissants de l'analyse.

LEMME : *(d'Ascoli)*

Soient X un espace topologique, D un ensemble dense dans X, Y un espace complet. Et soit (f_n) une suite équicontinue de fonctions de X dans Y qui vérifie

$$\forall x \in D \ : \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe et vaut } f(x)$$

alors pour tout $x \in X$ la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe et f, ainsi définie, est uniformément continue sur tout compact de X.

Avant d'énoncer le lemme suivant remarquons que si $|\,a\,| \leq 1$ et $|\,b\,| \leq 1$ alors

$$\begin{aligned}\Big|\,|\,a\,|^2 - |\,b\,|^2\Big| &= ||\,a\,| - |\,b\,||\,||\,a\,| + |\,b\,|| \\ &\leq 2\,||\,a\,| - |\,b\,|| \\ &\leq 2\,|\,a - b\,|\end{aligned}$$

LEMME : *Si S_τ possède un spectre purement continu alors $\lim_{N\to\infty} \mathcal{R}_\tau(N,\psi) = 0$ uniformément sur σ_E.*

PREUVE :

Fixons τ et examinons la suite $\mathcal{R}_\tau(N,\psi)$. En fait, cette suite est équicontinue car

$$|\,\mathcal{R}_\tau(N,\psi) - \mathcal{R}_\tau(N,\psi')\,| \leq \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\big|\,(S_\tau^k\psi, \psi - \psi')\,\big| + \big|\,(S_\tau^k\psi - S_\tau^k\psi', \psi')\,\big|\Big) \leq 4\,\|\psi - \psi'\|$$

Remarque : Ici on a posé $a = (S_\tau^k\psi, \psi)$ et $b = (S_\tau^k\psi', \psi')$. On a donc

$$a - b = (S_\tau^k\psi, \psi - \psi') + (S_\tau^k\psi - S_\tau^k\psi', \psi')$$

Il reste d'appliquer le lemme d'Ascoli.

$\square$

Étudions maintenant le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction analytique.

Lemme : *Soit ψ une fonction analytique sur C_α, 2π-périodique sur l'axe réel. Alors si, sur* $\mathbb{R}$

$$\psi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$$

on a, pour tout $\beta \in [0, \alpha[$

$$\sup\left\{ e^{\beta|\,n\,|}\,|\,c_n\,| \,:\, n \in \mathbb{Z} \right\} < \infty$$

Preuve :

Considérons d'abord le cas $n \geq 0$.

En intégrant $\psi(z)e^{-inz}$, qui est holomorphe dans C_α, sur le rectangle $0, -i\beta, 2\pi - i\beta, 2\pi$ on trouve que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \psi(\theta)e^{-in\theta}d\theta =& i\int_0^{-\beta} \psi(i\theta)e^{n\theta}d\theta + i\int_{-\beta}^{0} \psi(2\pi + i\theta)e^{n\theta}d\theta \\ &+ e^{-n\beta}\int_0^{2\pi} \psi(\theta - i\beta)e^{-in\theta}d\theta\end{aligned}$$

La périodicité de ψ dans $\mathbb{R}$ implique sa périodicité dans C_α car si on pose $g_1(z) = \psi(z)$ et $g_2(z) = \psi(z + 2\pi)$ alors g_1 et g_2 coïncident sur $\mathbb{R}$, or elles sont toutes les deux holomorphes dans C_α donc elles sont égales sur C_α .

Donc

$$c_n = \frac{1}{2\pi}e^{-n\beta}\int_0^{2\pi} \psi(\theta - i\beta)e^{-in\theta}d\theta$$

et par conséquent

$$|\,c_n\,| \leq e^{-n\beta} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\,\psi(\theta - i\beta)\,|\,d\theta}_{\text{Constante indépendante de } n}$$

Pour $n \leq 0$ on fait exactement la même chose sauf qu'on intègre cette fois ci sur le rectangle $0, i\beta, 2\pi + i\beta, 2\pi$.

□

Cela nous mène au lemme suivant.

LEMME : *Soient ψ entière et 2π-périodique, $V \in \mathcal{B}_\alpha$, $F_r(\psi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2r} |\, c_n \,|^2$ pour $r > 0$. Alors il existe une constante A telle que pour tout N on a*

$$F_r(S_\tau^N \psi) \leq AN^{2r} \, \|\psi\|^2$$

PREUVE :

Posons $\alpha' = \dfrac{\alpha}{2}$.

Pour tout N, $S_\tau^N \psi$ reste analytique sur C_α donc, en utilisant le lemme qu'on vient de montrer, on a pour tout $\beta \in [0, \alpha']$

$$q_\beta(N) = \sup \left\{ e^{\beta |\, n \,|} \,|\, c_n(N) \,| \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\} < \infty$$

où $c_n(N)$ est le n-ième coefficient de Fourier de $S_\tau^N \psi$.

Et si on note (W_n) les coefficients de Fourier de $e^{-i\mu V}$ alors le même lemme nous donne encore

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ |\, W_n \,| \leq d e^{-\alpha' |\, n \,|}$$

Notons maintenant $c'_n(N)$ les coefficients de Fourier de $T_\tau S_\tau^N \psi$, alors on a bien

$$S_\tau^{N+1} \psi = e^{-i\mu V} T_\tau S_\tau^N \psi$$

et, par conséquent

$$\begin{aligned}
|\, c_n(N+1) \,| &= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} W_{n-k} \, c'_k(N) \right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, W_{n-k} \,|\,|\, c'_k(N) \,| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, W_{n-k} \,|\,|\, c_k(N) \,| \\
&\leq d \, q_{\frac{1}{2}\alpha'}(N) \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2}\alpha' |\, k \,|} e^{-\alpha' |\, n-k \,|} \\
&\leq C_1 d \, q_{\frac{1}{2}\alpha'}(N) e^{-\frac{1}{2}\alpha' |\, n \,|}
\end{aligned}$$

car

$$e^{-\frac{1}{2}\alpha' |\, k \,|} e^{-\alpha' |\, n-k \,|} = e^{-\frac{1}{2}\alpha' (|\, k \,| + |\, n-k \,|)} e^{-\frac{1}{2}\alpha' |\, n-k \,|}$$

et on a bien $|\,k\,|+|\,n-k\,|\geq|\,n\,|$. Il suffit donc de poser

$$C_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2}\alpha'|\,n-k\,|} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2}\alpha'|\,k\,|}.$$

Alors on peut dire que

$$q_{\frac{1}{2}\alpha'}(N+1) \leq C_2\, q_{\frac{1}{2}\alpha'}(N)$$

et par conséquent que

$$q_{\frac{1}{2}\alpha'}(N) \leq C_2^N q_{\frac{1}{2}\alpha'}(0)$$

Il existe donc une constante $\gamma > 0$ qui vérifie

$$|\,c_n(N)\,| \leq e^{\frac{1}{4}\alpha'\gamma N} e^{-\frac{1}{2}\alpha'|\,n\,|}$$

et on a

$$F_r(S_\tau^N\psi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2r}\,|\,c_n(N)\,|^2 = \sum_{|\,n\,|\leq N\gamma} n^{2r}\,|\,c_n(N)\,|^2 + \sum_{|\,n\,|>N\gamma} n^{2r}\,|\,c_n(N)\,|^2$$

$$\leq \gamma^{2r}N^{2r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\,c_n(N)\,|^2 + \sum_{|\,n\,|>N\gamma} n^{2r}e^{-\frac{1}{2}\alpha'|\,n\,|}e^{-\frac{1}{2}\alpha'(|\,n\,|-\gamma N)}$$

$$\leq \gamma^{2r}N^{2r}\,\|\psi\|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2r}e^{-\frac{1}{2}\alpha'|\,n\,|}$$

et pour γ assez grande on a

$$F_r(S_\tau^N\psi) \leq 2\gamma^{2r}N^{2r}\,\|\psi\|^2$$

$\square$

Essayons maintenant de contrôler la dépendance de $\mathcal{R}_\tau(N,\psi)$ pour N et ψ fixés.

Lemme : *Soit ψ entière, 2π-périodique de norme $L^2(C)$ égale à un. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout τ et τ' on a*

$$|\,\mathcal{R}_\tau(N,\psi) - \mathcal{R}_{\tau'}(N,\psi)\,| \leq |\,\tau - \tau'\,|\,\beta N^3$$

Preuve :

Posons

$$Q_N = \left\|(S_\tau^N - S_{\tau'}^N)\psi\right\|$$

alors on a

$$\left|\,(S_\tau^N\psi - S_{\tau'}^N\psi, \psi)\,\right| \leq Q_N$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} Q_N &\leq \left\|(S_\tau - S_{\tau'})S_\tau^{N-1}\psi\right\| + \left\|S_\tau^{N-1}\psi - S_{\tau'}^{N-1}\psi\right\| \\ &= \left\|(S_\tau - S_{\tau'})S_\tau^{N-1}\psi\right\| + Q_{N-1} \end{aligned}$$

Or $S_\tau = e^{-i\mu V}T_\tau$ on a

$$\begin{aligned} \left\|(S_\tau - S_{\tau'})S_\tau^{N-1}\psi\right\| &= \left\|(T_\tau - T_{\tau'})S_\tau^{N-1}\psi\right\| \\ &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(N-1)\left(e^{-2i\pi\tau n^2} - e^{-2i\pi\tau' n^2}\right)e^{in\theta}\right\| \\ &\leq 2\pi\,|\,\tau - \tau'\,|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4\,|\,c_n(N-1)\,|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Remarque : On a utilisé

$$|\,e^{ix} - e^{iy}\,| = \left|\int_y^x e^{it}dt\right| \leq |\,x - y\,|$$

Alors, pour $r = 2$ dans le lemme précédent, on obtient

$$Q_N \leq A'\,|\,\tau - \tau'\,|\,N^2 + Q_{N-1}$$

En remarquant que $Q_0 = 0$ on obtient

$$Q_N \leq A'\,|\,\tau - \tau'\,|\,N^3$$

et par conséquent

$$|\,\mathcal{R}_\tau(N,\psi) - \mathcal{R}_{\tau'}(N,\psi)\,| \le \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} Q_k \le \frac{2}{N}A'\,|\,\tau-\tau'\,|\sum_{k=1}^{N} k^3 \le 2A'\,|\,\tau-\tau'\,|\,N^3$$

$\square$

Finalement, et avant de passer à la preuve du théorème 2, montrons un lemme sur l'approximation d'irrationnels par une suite de rationnels.

LEMME : *Soit* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *telle que* $f(n) = o(\frac{1}{n})$. *Alors*

$$\exists \tau \in]0,1[\,\backslash \mathbb{Q}\,,\ \exists\,((p_n,q_n)) \text{ suite dans } \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \ :\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \left|\tau - \frac{p_n}{q_n}\right| < f(q_n)$$

PREUVE :

Soit $q_1 > 2$ tel que $f(q_1) < 1$ alors on a

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{2}f(q_1) < 1$$

posons $\tau_1 = \dfrac{1}{q_1}$. Alors comme f est strictement positive l'intervalle $]\tau_1, \tau_1 + \frac{1}{2}f(q_1)[$ est non-vide et, par choix de q_1, il est inclut dans $]0,1[$.

Soit maintenant $\gamma_1 \in]\tau_1, \tau_1 + \frac{1}{2}f(q_1)[\,\backslash\mathbb{Q}$. Alors il existe une suite de rationnels $\left(\dfrac{i_n^1}{j_n^1}\right)$ convergente vers γ_1. Dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} j_n^1 = \infty$ car sinon on peut trouver une sous-suite constante de (j_n^1) égale à j_N^1 pour un certain N et, par conséquent, la sous-suite correspondante de i_n^1 convergera vers $\gamma_1 j_N^1$ ce qui est impossible vu l'irrationalité de γ_1.

Remarque : On a choisit, bien sre, i_n^1 et j_n^1 dans $\mathbb{N}^*$.

D'après ce qui précède on peut trouver $\tau_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ dans $]\tau_1, \tau_1 + \frac{1}{2}f(q_1)[\,\cap\mathbb{Q}$ tel que

$$\begin{cases} f(q_2) < f(q_1) \\ \tau_1 + \frac{1}{2}f(q_1) + \frac{1}{2^2}f(q_2) < 1 \end{cases}$$

cela est toujours possible à cause des deux conditions

$$\lim_{q\to\infty} f(q) = 0 \text{ et } \tau_1 + \frac{1}{2}f(q_1) < 1$$

et remarquons bien que la deuxième condition implique

$$\tau_2 + \frac{1}{2^2} f(q_2) < 1$$

On construit ainsi une suite de rationnels (τ_n) qui vérifient, pour tout n

$$\begin{cases} \tau_n = \dfrac{p_n}{q_n} \in]\tau_{n-1}, \tau_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}} f(q_{n-1})[\cap \mathbb{Q} \\ f(q_n) < f(q_{n-1}) \\ \tau_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}} f(q_{n-1}) + \dfrac{1}{2^n} f(q_n) < 1 \end{cases}$$

Alors on a trouvé une suite de rationnels telle que pour tout n on a

$$\tau_{n-1} < \tau_n < \tau_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} f(q_{n-1})$$

donc cette suite converge vers un certain τ, et on a en plus

$$\begin{aligned} \forall n > m \ : \ \tau_n - \tau_m = \sum_{i=m+1}^{n} (\tau_i - \tau_{i-1}) &< \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} f(q_{i-1}) \\ &< f(q_m) \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < f(q_m) \end{aligned}$$

si on fait tendre n vers l'infini on obtient

$$0 < \tau - \tau_m < f(q_m)$$

et cela pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Il reste à démontrer que τ est bien irrationnel.

Supposons l'inverse ; alors $\tau = \frac{a}{b}$. Or, par hypothèse, $f(q) = o(\frac{1}{q})$ donc il existe un entier q_0 tel que

$$q \geq q_0 \quad \Longrightarrow \quad f(q) < \frac{1}{bq}$$

mais

$$\forall \frac{p}{q} \neq \tau \ : \ \left| \frac{p}{q} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|\, pb - aq \,|}{qb} \geq \frac{1}{qb}$$

donc q_n doit rester au dessous de q_0 et on obtient

$$\text{Card } \{\tau_n \neq \tau \ : \ |\, \tau - \tau_n \,| < f(q_n)\} < \infty$$

ce qui est absurde car pour tout $n \neq m$ on a $\tau \neq \tau_n \neq \tau_m$.

□

Remarque : On peut aussi montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, ce qui est le cas lorsque f décroît et $f(n) = o(\frac{1}{n})$, alors l'ensemble des τ en question est un G_δ-dense [K].

On peut à présent commencer la preuve du théorème 2.

Preuve (Du Théorème 2)

Soient $V \in X_\alpha$. D'après un lemme précédent il existe, pour tout $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, un plus petit entier $\nu_E(q_0, \varepsilon)$ vérifiant

$$\forall \psi \in \sigma_E \ , \ \forall \tau = \frac{p}{q} \ , \ q \leq q_0 \ , \ p < q \ , \ \forall N \geq \nu_E(q_0, \varepsilon) \ , \ | \, \mathcal{R}_\tau(N, \psi) \, | < \varepsilon$$

remarquons bien que les τ en question constituent un ensemble fini.

On voit bien que ν_E croît quand q_0 croît ou quand ε décroît. Posons donc la fonction

$$\phi_E(q) = \frac{1}{q^2 \nu_E^3(q, q^{-1})} = o(\frac{1}{q})$$

Donc, par le lemme précédent, l'ensemble $L_{\phi_E} \subset [0, 1]$ des irrationnels τ qui sont une limite de rationnels $\tau_n = \frac{p_n}{q_n}$ tels que $| \, \tau - \tau_n \, | < \phi_E(q_n)$, est non-vide. Pour tout $\tau \in L_{\phi_E}$ et pour toute $\psi \in \sigma_E$ entière on a

$$\mathcal{R}_\tau(N, \psi) \leq | \, \mathcal{R}_\tau(N, \psi) - \mathcal{R}_{\tau_n}(N, \psi) \, | + \mathcal{R}_{\tau_n}(N, \psi) \leq \beta \, | \, \tau - \tau_n \, | \, N^3 + \mathcal{R}_{\tau_n}(N, \psi)$$

Posons maintenant $N_n = \nu_E(q_n, q_n^{-1})$.

Alors on a

$$\mathcal{R}_\tau(N_n, \psi) \leq \beta \, | \, \tau - \tau_n \, | \, \nu_E^3(q_n, q_n^{-1}) + q_n^{-1} \leq \beta \frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_n}$$

et quand n tend vers l'infini on voit bien que $\mathcal{R}_\tau(N_n, \psi)$ tend vers zéro.

Or q_n tend vers l'infini on peut supposer qu'elle est croissante. Donc (N_n) est aussi une suite croissante. Alors si N_n ne tend pas vers l'infini c'est qu'elle devient une suite constante après un certain n_0 ce qui annule $\mathcal{R}_\tau(N, \psi)$ pour tout $N \geq N_{n_0}$ car on a $| \, \mathcal{R}_\tau(N, \psi) \, | < \frac{1}{q_n}$ pour tout $n \geq n_0$.

Et si N_n tend vers l'infini alors 0 est une valeurs d'adhérence de $\{\mathcal{R}_\tau(N,\psi)\}_{N\in\mathbb{N}}$.

Mais on a déjà vu que pour tout τ et pour toute ψ

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{R}_\tau(N,\psi) = \int_0^{2\pi} < E_{\tau,\lambda}\psi, \psi > (\{\lambda\})\; d < E_{\tau,\lambda}\psi, \psi >$$

où $E_{\tau,\lambda}$ est la mesure spectrale de S_τ.

Donc dans tous les cas on a $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{R}_\tau(N,\psi) = 0$. Et, par conséquent

$$< E_{\tau,\lambda}\psi, \psi > (\{\theta\}) = 0 \quad < E_{\tau,\lambda}\psi, \psi > \text{-presque par tout}$$

ce qui implique que cette mesure est continue et que toute $\psi \in \sigma_E$ entière appartient à l'espace propre continu de S_τ, pour $\tau \in L_{\phi_E}$.

Maintenant soit $\psi \in \sigma_E$. Alors $\psi_N = \sum\limits_{|\,n\,|\leq N} c_n e^{in\theta}$ converge vers ψ dans $L^2(C)$. $\varphi_N = \dfrac{\psi_N}{\|\psi_N\|}$ converge, elle aussi, vers ψ.

En plus $\varphi_N(z)$ est entière et appartient à σ_E, pour N assez grand. En effet

$$\sum_{|\,n\,|\leq N} n^2 \,|\, c_n \,|^2 \leq \frac{E}{\pi} - \sum_{|\,n\,|>N} n^2 \,|\, c_n \,|^2 \leq \frac{E}{\pi} - N^2 \sum_{|\,n\,|>N} |\, c_n \,|^2$$

$$\leq \frac{E}{\pi}\left(1 - \sum_{|\,n\,|>N} |\, c_n \,|^2\right) = \frac{E}{\pi} \sum_{|\,n\,|\leq N} |\, c_n \,|^2$$

et cela pour tout $N \geq \dfrac{E}{\pi}$

Donc elle fait partie de l'espace propre continu de S_τ, or cet espace est fermé il contient ψ. Ce qui achève la démonstration.

□

Remarque : D'après la remarque précédente, et comme ϕ_E décroît, on peut même dire que L_{ϕ_E} est un G_δ-dense, et cela pour tout potentiel $V \in X_\alpha$. Donc, en fait, il existe, pour tout $V \in X_\alpha$, un ensemble générique d'irrationnels $\tau \in]0,1[$ tels que S_τ ait un spectre purement continu. Il suffit pour cela de prendre l'intersection des différents ensembles de fréquences τ correspondant aux σ_M pour M parcourant $\mathbb{N}^*$.

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Stephan De Bièvre pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, les remarques pertinentes dont il m'avait bénéficié, et surtout pour son soutien même en dehors du cadre de ce travail.

Références

Ce mémoire est essentiellement basé sur l'article de S. Casati et I. Guarneri, *Non-recurrent behavior in quantum dynamics*, Commun. Math. Phys. 95 (1984), 121-127.

[CFKS] H.L. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operator*, Springer Verlag (1987).

[IS] F.M Izrailev, D.L. Shepelyanski, *Quantum resonance for a rotator in non-linear periodic field*, Theor. Math. Phys. 43 (1980).

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra, vol I*, W.H. Freeman and Company (1974).

[K] A. Khinchin, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, Chicago and London (1964).

[RS I] M. Reed and B. Simon, *A course in mathematical physics, vol I.*

[RS III] M. Reed and B. Simon, *A course in mathematical physics, vol III.*