

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ

Зимен семестър 2002, ФМИ – СУ „Св. Климент Охридски“

СЪДЪРЖАНИЕ¹

1. Предмет на математическото моделиране. Анализ на размерностите	1
1 Предмет и основни идеи на математическото моделиране	1
2 Теория на размерностите. П-теорема. Примери	9
2. Елементарни модели (Моделиране с помощта на обикновени диференциални уравнения)	25
3 Закон на Малтус и различните му интерпретации	26
4 Охлаждане на телата. Разпространение на заразни болести и др. елементарни модели	33
5 Лимитирани популации	42
6 Популация в обкръжение на хищници	48
7 Два вида, „борещи се“ за обща храна	57
8 Най-прост модел „хищник-жертва“ — уравнения на Лотка-Волтера	61
3. Статика	71
9 Определения и аксиоми на статиката	72
10 Най-прости системи сили	79
11 Теория на двоиците	88
12 Свеждане на произволна система сили към сила и двоица. Условие за равновесие на система сили	97
13 Равновесие на нишка. Верижна линия	110

¹Текстът на лекциите е от книгата К. Марков, Математическо моделиране, изд-во на СУ „Св. Климент Охридски“, София, 2002. ©KZ Markov2002

4. Най-прости модели на деформируеми тела	119
14 Модел на еластично тяло	120
15 Най-прости приложения на закона на Хук	126
16 Надлъжни трептения на еластичен прът — вълново уравнение. Решение на Даламбер	131
17 Модел на вискозна течност	136
18 Понятие за вискозо-еластични модели. Тела на Максвел, Фойхт и Келвин	139
19 „Наследственост“ на телата. Принцип на суперпозицията на Болцман	148

Препоръчителна литература към курса:

1. К. З. Марков. Математическо моделиране. Изд. СУ „Св. Кл. Охридски“ София, 2002.
2. N. Bellomo and L. Preziosi, Modelling, Mathematical Methods, and Scientific Computation, CRC Press, 1995.
3. Л. И. Седов, Методы размерности и подобия в механике, Москва, „Наука“, 1981, изд. девятое.
4. J. David Logan, Applied Mathematics. A Conterporary Approach. John Willey, 1987, 572 pp.
5. W. E. Boyce, R. C. DiPrima. Elementary differential equations and boundary value problems. 6th ed. Wiley, 1998.
6. Mathematical Modelling eds. J.G. Anderson & R.R. McLone, Butterworths, London, 1976.
7. M. Reiner, Rheology, In: Encyclopedia of Physics, D. Flugge, ed., vol. VI, Springer-Verlag, Berlin- Gotingen-Heidelberg, 1958, p. 434-550.
8. V. Volterra, Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villard, Paris, 1931. (руски превод: Москва, „Наука“, 1976).

Глава 1

ПРЕДМЕТ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ. АНАЛИЗ НА РАЗМЕРНОСТИТЕ

§ 1. Предмет и основни идеи на математическото моделиране

1.1. Понятие за математически модел. Физическите обекти и системи се наблюдават и изучават с оглед разбиране (доколкото това е възможно) на вътрешната им структура и на поведението им. Те се наблюдават в интервали от време $[t_1, t_2] \in \mathfrak{R}$ и в област Ω на тримерното пространство. Интервалът от време (t_1, t_2) и областта Ω могат да бъдат, по принцип, и неограничени.

Навсякъде в този курс времето и пространството се разглеждат в класическия нютонев смисъл. Времето е абсолютно и тече навсякъде по един и същ начин, независимо от движението на телата. Пространството също е абсолютно, то е „вместилище“ и „арена“ на движещата се материя. Свойствата му са едни и същи във всички точки и не зависят от количеството присъстваща там материя. Съгласно айнщайновата теория на относителността това разбиране е само приближение, което е напълно приемливо за движения със скорости, много по-малки от скоростта на светлината.

Изучаването и моделирането на поведението на системите се предхожда от наблюдения и подробно експериментално изучаване. За целта често е необходимо провеждането на специфични експерименти, което, само по себе си, в много случаи е нетривиално и изисква изобретателност и значителни средства.

След събирането на експерименталните данни изучаването преминава на стадия на интерпретацията и предсказването на поведението на системата. За тази цел именно се строят математическите модели.

Най-общо предназначението на всеки математически модел е да се изяснят:

1. Най-важните величини, определящи състоянието и поведението на една система.
2. Количествените закономерности, т. е. математическите закони, на които се подчинява изменението на тези величини.

По-специално построяването на всеки конкретен модел включва два основни етапа:

А. Идентифициране на параметрите на състоянието q_1, q_2, \dots, q_n , които характеризират състоянието на системата с приемлива за нашите цели точност.

Що е това състояние, зависи от конкретния контекст на моделирането и преследваните от нас цели. В най-простия пример, свързан с моделирането на движението на материална точка под действието на външна сила, съответният параметър на състоянието е просто положението на точката, определено например с радиус-вектора ѝ спрямо фиксирана точка в пространството. Този пример ще разгледаме по-подробно в § 1.3, предвид принципната роля на появяващия се там фундаментален нютонув закон на динамиката, „управляващ“ движението на точката.

В случая на биологическа популация параметрите q_i представляват броя на индивидите N_1, N_2, \dots, N_k от всеки отделен вид, $i = 1, \dots, k$.

За нагрятото тяло основните параметри на състоянието са температурата, както и векторът на топлинния поток, вж. § 21.1.

За идеален газ параметрите на състоянието са налягането, обема и температурата.

В общия случай параметрите на състоянието са функции на основните независими променливи: времето t и пространствените координати

$$q_i = q_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Поради това q_i се наричат също и *зависими променливи*. Конкретният вид на зависимостите (1.1) се намира в рамките на даден модел, след като се реши съответната моделна математическа задача.

Б. Идентифициране на параметрите на системата, т. е. на *физическите величини, които характеризират свойствата на моделираната система, както и влиянието на обкръжението ѝ*.

Например при моделиране на движението на материална точка параметрите са нейната маса и действащата върху нея сила. Тук масата характеризира свойствата на моделираната система (точката), а силата — влиянието на обкръжението ѝ, т. е. последната отразява взаимодействието на точката с други тела.

За всеки конкретен случай параметрите на системата се определят или чрез директно измерване върху изследваните обекти, или чрез сравнение между поведението на реалната система и предсказанията на модела.

Сега сме в състояние да дадем една достатъчно обща, макар и твърде формална, дефиниция на понятието математически модел.

Дефиниция 1.1. ([18]) *Математическият модел е уравнение (или система от уравнения), което свързва параметрите на състоянието и техните производни (спрямо времето или спрямо пространствените координати). Уравнението, което дефинира модела, се нарича често уравнение на състоянието.*

Най-общо, уравнението на състоянието има следния схематичен вид:

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = 0. \quad (1.2)$$

Многообразието след q_n може да включва производни на q_i , интегрални оператори, приложени върху тях или върху техни комбинации и т. н. Лявата страна на (1.2) включва естествено и параметрите на системата.

Уравнението (1.2) може да бъде също векторно или тензорно. Проектирането му върху съответните координатни оси води до система от скаларни уравнения спрямо параметрите на състоянието. Към тях се прибавят начални и гранични условия, които позволяват еднозначното определяне на търсените параметри на състоянието във всяка конкретна задача. Решението на съответната система с подходящи начални и гранични условия конкретизира зависимостите (1.1), вж. примера в § 1.3.

Уравнението (1.2) касае, разбира се, *динамични модели*, в които времето t и скоростите \dot{q}_i на изменение на параметрите на състоянието са от съществено значение за адекватното описание на изучаваната система. Следвайки Нютон, тук и навсякъде по-нататък означаваме диференцирането спрямо времето с точка над съответната функция, така че $\dot{q}_i = dq_i/dt$.

В *стационарните модели* времето не участва явно в уравнението на състоянието:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = 0, \quad (1.3)$$

и то се превръща в съотношение между параметрите q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и евентуално техните производни спрямо пространствените координати. Времето може да участва обаче неявно в (1.3), например ако скоростта е един от параметрите на състоянието. Ако физическите закони, с които се комбинира (1.3), заедно с параметрите q_i , не съдържат явно или неявно

времето, то моделът се нарича *статичен*. С такъв модел ще се срещнем в глава 3 при разглеждане на геометричната статика, чийто предмет са условията за равновесие на система сили, приложени към абсолютно твърдо тяло.

Да отбележим специално, че често под модел се разбира единствено окончателната форма на уравнението (1.2), описващо разглежданото физично явление, например вълновото уравнение (за трептенията на прът или струна, вж. § 16) или уравнението на топлопроводността (за температурното поле в тяло, вж. § 21). Подобна гледна точка, разбира се, е оправдана в случаите, когато моделите имат чисто феноменологичен характер. Класически пример на подобни модели предлага популационната динамика и други елементарни модели, на които е посветена глава 2 на настоящата книга. В тези модели скоростите на изменение \dot{q}_i на параметрите на състоянието се свързват със стойностите на тези параметри на базата на чисто емпирични правдоподобни разсъждения, зад които *не стоят* фундаментални закономерности от типа на закона на Нютон. Подобен подход, разбира се, е полезен и оправдан, доколкото е в състояние да опише и прогнозира адекватно реалностите на съответните физически системи и явления.

В рамките на този курс ще предпочетем, където това е възможно, един „по-физичен“ подход към моделирането, който, по мнение на автора, спомага за по-дълбокото осмисляне на съответните модели. Именно, под уравнение на модела (1.2) ще разбираме преди всичко съвкупността от връзките между параметрите на състоянието на системата, а не само окончателните уравнения за тези параметри. Например за еластично тяло централен за нас ще бъде законът на Хук, свързващ напрежението и деформацията (§ 14); за топлопроводящо тяло подобна централна роля ще играе законът на Фурие, свързващ топлинния поток и градиента на температурата (§ 21). На свой ред тези уравнения се комбинират по подходящ начин с един или друг основен закон на физиката. Например законът на Хук, комбиниран с втория закон на Нютон, води до уравнението на движението на еластично тяло, разгледано тук (§ 16) само в едномерния случай. Законът на Фурие, комбиниран със закона за топлопоглъщането¹, води до уравнението на топлопроводността, на което се подчинява полето на температурата в тялото (§ 21) и т. н.

Да подчертаем, че като правило уравнение на състоянието е само крайният резултат на моделирането или, образно казано, „върхът на

¹Количеството топлина, погълнато от обем от тялото, е пропорционално на изменението на температурата на този обем.



Схема 1.1

айсберга“. За да се достигне до него, следва попътно да се изясни общата структура на изучаваните класове обекти с цел класификация и свеждане до възможно най-простите (в определен смисъл) обекти. Трябва да се изяснят и осмислят също така и възприетите, явно или неявно, предположения, довели до формулировката на уравненията на модела (1.2). Ако това не се направи предварително, съществува опасност моделът да се прилага към проблеми и явления, за които той по принцип е неприложим, и това, рано или късно, ще доведе до нереалистични и даже абсурдни резултати. В други случаи е необходимо да се разработи специфичен математически апарат за успешното моделиране на изучавания кръг явления. С такава необходимост ще се сблъскаме в глава 5 при изследването на топлинните процеси в неравномерно нагreti тела. Нужният апарат² там е векторният анализ и набла-смятането на Хамилтън, които са изложени в § 20. Едва след това ще сме в състояние да се заемем по-детайлно с класическия модел на топлопроводността на Фурие. Всичко това представлява нетривиалната част на моделирането или, образно казано, „подводната част на айсберга“, която, както е известно, е много по-обширна и „дълбока“ (в прекия и преносен смисъл) от „върха“ му (в нашия контекст, от формалното само по себе си уравнение на състоянието (1.2)).

1.2. Обща схема на математическото моделиране. Основните и типични стъпки при моделирането на дадено явление са отбелязани в схема 1.1 (в по-голямата си част тя е заимствана от [16, стр. 24]). Те едва ли се нуждаят от по-подробен допълнителен коментар, освен от няколко забележки.

Симулацията на физическата система е резултат от решаване на съответната моделна математическа задача с помощта на подходящи математически методи. Нека специално отбележим, че много от най-красивите методи в чистата математика са се появили точно при решаването на класическите задачи на динамиката, балистиката, топлопроводността и пр.

При верификацията се прави сравнение на предсказаните резултати с наблюденията и експерименталните данни. Ако има съвпадение между предсказанията и експеримента, моделът се потвърждава. Ако няма съвпадение, изследователят се връща към изходните предпоставки и съотношения, за да ги осмисли, ревизира и уточни. Тъй като универсални

²Моделирането на поведението на непрекъснатите (деформируемите) среди, което тук няма да бъде засегнато, изисква предварително въвеждането и усвояването на тензорната алгебра и тензорния анализ.

модели не съществуват³, рано или късно верификациите ще покажат съществуването на ситуации, в които моделът е неприложим. Това далеч не винаги е причина обаче той да се отхвърли категорично или да се усложнява и обобщава. Верификациите по-скоро позволяват да се очертаят границите на приложимост на модела. При това на практика е удобно да се работи с няколко по-прости модела, всеки от които има ясна и добре проверена област на приложимост, отколкото с един по-общ, но за сметка на това значително по-сложен модел.

Специално ще обърнем внимание на момента след формулировката на модела (вж. „правоъгълничето“ D в схема 1.1), където става разделянето на „чистата“ от „приложната“ математика. Чистият математик игнорира, „забравя“ произхода на проблема и се концентрира *единствено и изцяло* върху математическия проблем сам по себе си. Приложният математик през цялото време се съобразява с *конкретния физически контекст* и възможното *прилагане* на своите резултати. При това той често привлича качествени, приближени и далеч не винаги строги методи⁴, стига те да са ефективни и да водят до реалистични и смислени резултати.

Да отбележим в заключение на този пункт, че математическото моделиране не е единственият начин за изучаване на конкретни физически системи. В последните години, в резултат на взривообразното увеличаване на процесорната мощ, паметта и бързодействието на съвременните изчислителни комплекси, все по-често се използва и т. нар. *директно компютърно моделиране*. Но колкото и любопитни да са получените по този път резултати, цялостното им осмисляне е невъзможно извън рамките на един адекватен математически модел.

1.3. Пример: динамика на материална точка. Да илюстрираме изложената в § 1.1 обща схема посредством класическия пример на движение на материална точка M (тяло с пренебрежимо малки размери) под действието на приложена към нея сила \mathbf{F} , вж. фиг. 1.1.

Стъпка A – параметърът на състоянието, в случая положението на точката, се задава с радиус-вектора $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ спрямо неподвижен полюс O .

Тук и навсякъде по-нататък ще означаваме векторите с „получерните“ букви \mathbf{r} , \mathbf{a} , \mathbf{F} и т. н. Дължините на съответните вектори ще означаваме със същата буква, но изписана с курсив, например

$$r = |\mathbf{r}|, \quad a = |\mathbf{a}|, \quad F = |\mathbf{F}| \quad \text{и т. н.}$$

³Това твърдение може да се разглежда като единствения „универсален“ закон при моделирането на природните явления.

⁴От много от тези методи чистият математик може да се „ужаси“, при това с пълно, от негова гледна точка, право.

Радиус-векторът в случая е функция само на времето t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Стъпка B — параметрите на системата са масата на точката m , която е мярка за нейната инертност, и приложената сила \mathbf{F} , която е мярка за взаимодействието на точката с обкръжаващите я тела. Да отбележим, че силата, най-общо казано, е променлива не само във времето. Тя може да зависи и от положението на точката (такава е например силата на привличането, пружинната сила и др.). Така наречените съпротивителни сили, възникващи при движение на тяло в течност или в газ, зависят съществено от скоростта на движението. Това означава, че в общия случай

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

където

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

е векторът-скорост на точката.

И сега идва финалният момент — формулирането на математическия модел. В случая това е вторият закон на Нютон, изразяващ уравнението на „състоянието“ на точката:

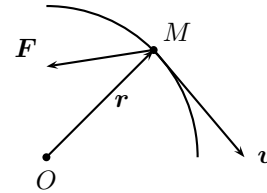
$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \quad (1.4)$$

В декартова координатна система $Ox_1x_2x_3$ и при постоянна маса на точката векторното уравнение (1.4) води, след проектиране върху координатните оси, до системата от три обикновени диференциални уравнения

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ m\ddot{x}_3 &= F_3(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \end{aligned} \quad (1.5)$$

която следва да се решава при съответните начални условия

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}, & x_2 &= x_{20}, & x_3 &= x_{30}, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_{10}, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_{20}, & \dot{x}_3 &= \dot{x}_{30}, \quad \text{при } t = t_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$



Фиг. 1.1. Движение на точка

т. е. при зададено начално положение \mathbf{r}_0 и начална скорост \mathbf{v}_0 в момент $t = t_0$. Да напомним, че системата уравнения (1.5) заедно с началните условия (1.6) представлява типичен пример на т. нар. *задача на Коши*.

След поставянето на задачата на Коши (1.5), (1.6) изследвателят може да тръгне, както вече споменахме, по двата пътя след „правоъгълничето“ D в схема 1.1. Първият от тях е чисто математическият: търсене на условия за локално и/или глобално съществуване на решението на задачата на Коши (1.5), (1.6) (спомнете си теоремите на Пикар или на Пеано), качествено изследване на решението, търсене на периодични решения и пр. Всичко това е предмет на съвременната теория на обикновените диференциални уравнения.

Вторият път, по който може да тръгне изследвателят, е приложният. Тук задачата (1.5), (1.6) се решава за конкретни сили и конкретни механични проблеми (едномерно движение, осцилации, движение на планета в нютоново поле и пр.). Всичко това е предмет на класическата нютонова механика.

Въпросът кой от споменатите два подхода — чисто теоретичният или приложният — е по-добър или е за предпочитане, е безсъдържателен, тъй като отговорът му зависи от поставените цели, предпочитанията и личния вкус на изследвателя. А за вкусовете, както е известно, не се спори. Още повече, че „хубавата“ математика рано или късно намира нетривиални и дълбоки приложения. Да споменем само един класически пример — 20 века след като Аполоний в древна Гърция въвежда и изследва коничните сечения, воден единствено от любопитството си на „чист“ математик, Нютон показва, че тези сечения представляват траекториите на планетите в нютоновото поле на привличане на Слънцето. Обратно твърдение е също верно — както показва историческият опит, интересният и съдържателен модел поражда и стимулира развитието на „хубавата“ математика. (Да си припомним само, че класическият анализ в голяма степен е плод на предизвикателствата, поставени от класическата и небесната механика.)

Идеалът, разбира се, е в комбинацията и съчетаването на споменатите два пътя на разсъждения и изследвания. Това е по силите на блестящия математик-формалист, притежаващ в същото време дълбоко разбиране, интуиция и афинитет към приложните задачи. Такива са били класиците Нютон, Лайбниц, Хюйгенс, Якоб, Йоан и Даниил Бернули, Ойлер, Коши, а и редица други, с чиито идеи, модели и резултати ще се срещаме по-нататък.

§ 2. Теория на размерностите. Π -теорема. Примери

2.1. Размерни и безразмерни величини. Стойностите на физическите величини, появяващи се при изследването на различните явления, се определят с помощта на числа. При конкретното измерване наблюдателят използва по свой избор конкретни системи от мерни единици (или, еквивалентно и по-кратко казано, конкретни мащаби). При това се оказва, че има два типа величини. При едните стойността им не зависи от приетата система единици за измерване. Такива величини се наричат *безразмерни*. Стойностите на другия тип величини зависят от приетата система единици. Те се наричат *размерни*. Могат да се дадат многобройни примери на размерни величини, с които ще се сблъскаме по-нататък — да споменем дължината, времето, масата, силата, енергията и др. Безразмерни са ъглите⁵, отношението на две дължини или две лица и др.

Съгласно дефиниция 1.1, финалът при моделирането на дадено явление е формулировка на определени съотношения между съответните параметри на състоянието (включващи, евентуално, техни производни или интегрални). Това съотношение може, в най-общ и схематичен вид, да се запише

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = 0, \quad (2.1)$$

както вече отбелязахме в § 1.1, вж. (1.2).

Доколко законът (2.1) е оправдан и реалистичен, е въпрос на подробно изследване в рамките на конкретната физическа теория и контекст. Може обаче да се формулира едно общо изискване към съотношението (2.1), което ще изключи автоматично всички нереалистични закони, без оглед на съображенията, представите и аргументите, използвани за извода им. Това изискване е следствие от факта, че мерната единица (мащабът) е нещо, въведено от наблюдателя още в началния стадий на експерименталното изучаване на даденото явление. В същото време физическият закон *не трябва да зависи* от мащаба и поради това трябва да свързва помежду си безразмерни величини. По същество това е твърдението на Π -теоремата (известна още като теорема на Бъкингам), която ще формулираме по-долу.

⁵Ъгълът е безразмерен, защото се мери чрез отношението на две дължини: дължината на съответстващата му дъга от окръжност, в която той е централен ъгъл, към дължината на цялата окръжност.

2.2. Основни системи мерни единици. Доколкото в рамките на този курс няма да се разглеждат електромагнитни явления, а само механични, достатъчно е да се зададат мерните единици на три *основни* (или *първични*) физически величини⁶.

Тогава основните единици за всички останали величини ще бъдат *производни* (или *вторични*), в смисъл че те ще се изразят чрез основните. Съответните изрази ще бъдат следствие или от дефинициите им, или от някои фундаментални закони (например втория закон на Нютон). Тези изрази ще зададат т. нар. *размерности* на величините, които ще обсъдим по-подробно в § 2.3.

Изборът на основните единици, т. е. на мерните системи, зависи от конкретния контекст и от кръга разглеждани задачи. Най-популярните системи са две.

Първата система се използва преди всичко при физическите задачи. Тук основните единици са дължина, време и маса. Стандартно това са сантиметърът (cm), секундата (s) и грам-масата (g) — оттук и наименованието CGS на тази система. Единиците за дължина — 1 метър (= 100 cm), маса — един килограм (= 1000 g), и време — 1 секунда, са възприети на базата на международни договорености и стандарти.

Да припомним в тази връзка, че в първоначалния стандарт, въведен от Френската Академия, 1 метър се определя като $1/(4 \cdot 10^7)$ от дължината на парижкия меридиан, а 1 kg — като масата на 1 кубически дециметър дестилирана вода при 4°C и при атмосферно налягане 760 mm живачен стълб. По-късно е изготвен еталонен метър от платинено-иридиева сплав, който се съхранява в Палатата на мерките и теглилките в Париж. В тази палата се съхранява и еталонната маса от 1 kg, направена от същата сплав. За 1 секунда дълго време се е приемала $1/(24 \times 3600)$ -част от средното слънчево денонощие.

Поради неизбежната неопределеност при измерванията, през 1960 г. се възприемат нови, „по-точни“ еталони за основните единици. За пълнота на изложението ще ги припомним и тук. Например 1 m е равен на 1 650 763, 73 дължини на вълната на червеникаво-оранжевата светлина, излъчвана от изотопа криптон-86. През 1983 г. е възприета нова дефиниция на метъра: това е разстоянието, което светлината изминава във вакуум за интервал от време, равен на $1/299\,792\,458$ от секундата. Една секунда е равна на 9 192 631 770 периода на излъчването, съответстващо

⁶Защо три? Спомнете си основните понятия на класическата механика — материя (с маса M), движеща се (в течение на времето T) в пространството (с характерна дължина L).

на две свръхтънки нива на основното състояние на атома на цезий-133.

В момента международно приетата система единици е SI (*Systeme Internationale*). Нейното различие от CGS-системата се състои в това, че за маса се използва мерната единица 1 kg вместо 1 g, а за дължина — 1 m вместо 1 cm. Единицата за измерване на силата тук, както и при CGS системата, е вторична. Тя се нарича *нютон* (N) и е равна на силата, която придава ускорение 1 m/s^2 на маса 1 kg, т. е.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ kgm/s}^2.$$

Да споменем за пълнота, че международният стандарт дефинира освен единиците за дължина, маса и време още четири основни единици. Това са келвинът (за термодинамичната температура), амперът (за сила на електрическият ток), молът (за количество вещество) и канделата (за осветеност). Подробности могат да се намерят например в [13].

Друга широко разпространена система от единици е *техническата*. При нея се използват единиците метър за дължина, килограм-сила (kG) за сила и секунда за време — оттук и съкращението MKS (или MKGS).

Съотношението между единиците за сила в системите SI и MKS е

$$1 \text{ kG} = g \times 1 \text{ N} \approx 9,81 \text{ N}, \quad 1 \text{ N} \approx 0,102 \text{ kG},$$

тъй като връзката между теглото и масата на тялото се дава от добре познатата формула $P = mg$, където $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ е стойността на земното ускорение.

2.3. Размерност. Зависимостта на единиците за измерване на дадена величина q от основните единици в избрана система се нарича, най-общо, *размерност* и се отбелязва, следвайки Максвел, с $[q]$. Ако величината q е безразмерна, пишем $[q] = 1$.

Например размерността на скоростта е

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad (\text{пътят, разделен на времето}),$$

на ускорението

$$[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2} \quad (\text{скоростта, разделена на времето}),$$

на силата, съгласно втория закон на Нютон,

$$[F] = M [a] = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2},$$

на работата:

$$[A] = [F] L = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2T^{-2} \quad (\text{сила} \times \text{път}).$$

Навсякъде тук и по-нататък е възприета CGS-системата, като L е единицата за дължина, M — за маса, и T — за време.

Във всички тези примери се вижда, че размерността е хомогенен едночлен на основните мерни единици L , M и T , т. е. израз от вида

$$[q] = L^\ell M^m T^t. \quad (2.2)$$

Оказва се, че размерността на произволна физическа величина (в CGS-системата⁷) също има вида (2.2). Този вид е следствие на очевидния факт, че отношението на числените стойности на дадена величина, в рамките на избран мащаб, не зависи от избора на мащаба. Например отношението на лицата на две фигури трябва да е едно и също независимо дали ги измерваме в кв. см. или кв. километри.

За да се убедим в това, да предположим например, че величината y е геометрична, в смисъл че тя зависи само от дължината, т. е.

$$y = f(q_1), \quad [q_1] = L.$$

(Разсъждението в случая, когато имаме аргументи с размерности M и T , е аналогично.)

Нека

$$y' = f(q'_1)$$

е стойността на y , съответстваща на друга стойност q'_1 на аргумента. Ако изменим мащаба α пъти, отношението

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(q'_1)}{f(q_1)} = \frac{f(q'_1\alpha)}{f(q_1\alpha)} = \text{const}$$

трябва да остане неизменно, както вече споменахме, т. е.

$$\frac{f(q'_1\alpha)}{f(q_1\alpha)} = \text{const}.$$

Оттук следва на свой ред, че отношенията

$$\frac{f(q_1\alpha)}{f(q_1)} = \frac{f(q'_1\alpha)}{f(q'_1)} = \varphi(\alpha) \quad (2.3)$$

⁷В друга система ролята на L , M и T ще играят възприетите в нея основни единици.

не зависят от конкретния избор на мащабите, а само от това колко пъти единият мащаб се „нанася“ в другия, т. е. само от параметъра α . Този именно факт ще ни позволи да намерим вида на функцията $\varphi(\alpha)$.

Нека $q'_1 = \mu q_1$, тогава

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \frac{f(q'_1 \alpha)}{f(q'_1)} = \frac{f(\alpha \mu q_1)}{f(\mu q_1)} \\ &= \frac{f(\alpha \mu q_1)/f(q_1)}{f(\mu q_1)/f(q_1)} = \frac{\varphi(\mu \alpha)}{\varphi(\mu)},\end{aligned}$$

вж. (2.3), т. е. $\varphi(\alpha)$ удовлетворява функционалното уравнение

$$\varphi(\mu \alpha) = \varphi(\mu) \varphi(\alpha). \quad (2.4)$$

За намирането на $\varphi(\alpha)$ диференцираме (2.4) спрямо μ :

$$\alpha \varphi'(\mu \alpha) = \varphi'(\mu) \varphi(\alpha),$$

което след полагане $\mu = 1$ води до

$$\alpha \varphi'(\alpha) = \ell \varphi(\alpha), \quad \ell = \varphi'(1).$$

Това е диференциално уравнение спрямо функцията $\varphi(\alpha)$. Решението му, при очевидното начално условие $\varphi(1) = 1$, е

$$\varphi(\alpha) = \alpha^\ell. \quad (2.5)$$

Оттук и от (2.3) се вижда, че

$$f(\alpha q_1) = \alpha^\ell f(q_1) = \alpha^\ell y,$$

т. е. размерността на геометричната величина y наистина има вида

$$[y] = L^\ell.$$

2.4. Независимост на физическия закон от мащаба. Да се върнем сега към физическия закон (2.1), като предположим, че

$$[q_i] = L^{\ell_i} M^{m_i} T^{t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Да сменим мащабите по произволен начин:

$$\bar{L} = \lambda_\ell L, \quad \bar{M} = \lambda_m M, \quad \bar{T} = \lambda_t T, \quad \lambda_\ell, \lambda_m, \lambda_t > 0.$$

Спрямо новите мерни единици величините t и q_i ще се преобразуват по следния начин:

$$\bar{t} = \lambda_t t, \quad \bar{q}_i = \lambda_\ell^{\ell_i} \lambda_m^{m_i} \lambda_t^{t_i} q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дефиниция 2.1. Казваме, че законът (2.1) е независим от избора на мащаба, ако

$$f(t, q_i) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{t}, \bar{q}_i) = 0, \quad \forall \lambda_\ell, \lambda_m, \lambda_t > 0. \quad (2.6)$$

Изискването (2.6) е напълно естествено за всеки закон, претендиращ да описва физическата реалност. Както вече отбелязахме, такъв закон трябва да бъде *обективен*, в смисъл че той не трябва да зависи от субективни фактори, каквито са например конкретният избор на мерните единици (мащаба).

Пример 2.1. Нека x е пътят, изминат от свободно падащо тежко тяло (без начална скорост) за време t . Както е добре известно, x и t са свързани със съотношението, познато като закон на Галилей за свободното падане:

$$f(t, x, g) = x - \frac{1}{2}gt^2 = 0, \quad (2.7)$$

където g е земното ускорение, $[g] = LT^{-2}$.

Да проверим дали законът (2.7) е независим от избора на мащаба. Нека

$$\bar{t} = \lambda_t t, \quad \bar{x} = \lambda_\ell x. \quad (2.8)$$

Тогава съгласно формулата за размерността на g ,

$$\bar{g} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_t^2} g. \quad (2.9)$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{g}) &= \lambda_\ell x - \frac{1}{2} \frac{\lambda_\ell}{\lambda_t^2} g \cdot (\lambda_t^2 t^2) \\ &= \lambda_\ell \left(x - \frac{1}{2}gt^2 \right) = \lambda_\ell f(x, g, t). \end{aligned}$$

Но $\lambda_\ell > 0$ и затова

$$f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{g}) = 0 \Leftrightarrow f(t, x, g) = 0,$$

т. е. законът на Галилей (2.7) *не зависи* от избора на мащаба в смисъла на дефиниция 2.1.

2.5. Π -теорема. В примера 2.1 да положим чисто формално

$$\lambda_t = 1, \quad \lambda_x = \frac{1}{x}.$$

Тогава

$$\bar{x} = 1, \quad \bar{g} = \frac{g}{x},$$

вж. (2.8), (2.9), и законът на Галилей (2.7) приема вида

$$f(\pi_1) = 1 - \pi_1 = 0, \quad (2.10)$$

където

$$\pi_1 = \frac{gt^2}{2x}. \quad (2.11)$$

Очевидно π_1 е безразмерна величина, $[\pi_1] = 1$. По такъв начин успяхме да запишем независещия от мащаба закон (2.7) в еквивалентния вид (2.10), в който вече участват само безразмерни величини — в случая единствено π_1 .

Този резултат е частен случай на Π -теоремата, която ще формулираме по-нататък. Преди това да въведем обаче следната

Дефиниция 2.2. *Казваме, че величините q_1, \dots, q_k имат независими размерности, ако размерността на нито една от тях не може да се представи като произведение на степени на размерностите на останалите величини.*

Например основните единици L , M и T са с независими размерности. Но скоростта v , ускорението a и времето t са вече зависими, защото

$$[a] = LT^{-2} = [v] [t]^{-1} = (LT^{-1}) \cdot T^{-1}.$$

В разгледания по-горе пример 2.1 имаме в частност само две величини с независими размерности — x и t , тъй като размерността на g се изразява очевидно чрез тези на x и t .

Тъй като в обсъжданите в рамките на този курс задачи основните единици са три, то колкото и да са на брой разглежданите величини, броят на независимите сред тях е не повече от три, $k \leq 3$.

Да предположим, че в закона (2.1) има k аргументи с независими размерности:

$$f(q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n) = 0, \quad (2.12)$$

и нека техните размерности са

$$[q_1] = A_1, \dots, [q_k] = A_k. \quad (2.13)$$

(Обръщаме внимание, че в (2.12) времето t е включено като един от аргументите q_i на закона $f = 0$, срв. (2.1).) Тогава размерностите на останалите величини ще се изразят чрез тези на независимите:

$$\begin{aligned} [q_{k+1}] &= A_1^{m_1} \cdots A_k^{m_k}, \\ &\vdots \\ [q_n] &= A_1^{p_1} \cdots A_k^{p_k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Да изменим мащабите на независимите величини q_1, \dots, q_k съответно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ пъти:

$$q'_1 = \alpha_1 q_1, \dots, q'_k = \alpha_k q_k.$$

Съгласно (2.14) зависимите величини ще се изменят по следния начин:

$$\begin{aligned} q'_{k+1} &= \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k} q_{k+1}, \\ &\vdots \\ q'_n &= \alpha_1^{p_1} \cdots \alpha_k^{p_k} q_n, \end{aligned}$$

а самият закон (2.12) ще се преобразува във вида

$$f(\alpha_1 q_1, \dots, \alpha_k q_k, \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k} q_{k+1}, \dots, \alpha_1^{p_1} \cdots \alpha_k^{p_k} q_n) = 0. \quad (2.15)$$

(Дясната страна тук е нула, тъй като е предположено, че (2.12) не зависи от избора на мащаба.)

Да изберем параметрите α_k по следния начин:

$$\alpha_1 = \frac{1}{q_1}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{q_k}.$$

Тогава независимите променливи в (2.15) се заменят с единици, а зависимите — с величините

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{q_{k+1}}{q_1^{m_1} \cdots q_k^{m_k}}, \\ &\vdots \\ \pi_{n-k} &= \frac{q_n}{q_1^{p_1} \cdots q_k^{p_k}}, \end{aligned}$$

които, предвид (2.13) и (2.14), са вече безразмерни. На свой ред законът (2.12) се записва във вида

$$f(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0,$$

т. е. наличието на k променливи с независима размерност във физическия закон (2.12) ни позволява да намалим броя на аргументите му с k и да го изразим само чрез безразмерни величини. Този резултат е именно твърдението на основната (и единствено съдържателна теорема) от анализа на размерностите, която сега ще формулираме за пълнота още веднъж:

Теорема 2.1 (P -теорема или теорема на Бъкингам). Нека (2.12) е физически закон, независещ от избора на мащаба. Тогава той е еквивалентен на закон от вида

$$F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0,$$

където π_1, \dots, π_{n-k} са безразмерни, а k е броят на аргументите с независима размерност в изходния закон (2.12).

Да подчертаем още веднъж, че смисълът на P -теоремата е прост и прозрачен и се свежда до това, че един закон може да претендира за „физичност“ единствено ако свързва безразмерни величини (т. е. ако не зависи от избора на мащаба, вж. § 2.4). Ако в първоначалната формулировка на подобен закон участват размерни величини, то те задължително се комбинират помежду си, като породят споменатите по-горе безразмерни величини π_1, \dots, π_k . Това именно намалява броя на аргументите на физическия закон в неговата първоначална „размерна“ формулировка и оставя в крайна сметка в него само безразмерни аргументи.

2.6. Примери. Да разгледаме сега няколко ефектни примера за приложение на P -теоремата и на анализа на размерностите.

Пример 2.2 (теорема на Питагор) ([2, стр. 32]). Нека S е лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза c , катети a и b и ъгъл при хипотенузата φ , вж. фиг. 2.1. Очевидно c и φ определят еднозначно лицето:

$$S = S(c, \varphi).$$

Ъгълът φ е безразмерен и затова

$$S = c^2 \Phi(\varphi),$$

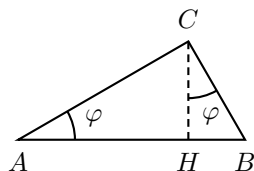
тъй като c^2 има размерността на лице S , т. е. отношението S/c^2 е безразмерно и поради това то трябва да бъде функция на единствения друг безразмерен параметър тук — ъгъла φ .

Да спуснем перпендикуляра CH към хипотенузата. Той разделя изходния правоъгълен триъгълник на два подобни, също така правоъгълни, чиито ъгли при хипотенузите им отново са равни на φ , вж. фиг. 2.1.

Ясно е, че

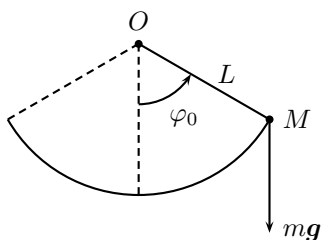
$$c^2 \Phi(\varphi) = a^2 \Phi(\varphi) + b^2 \Phi(\varphi).$$

Оттук, след съкращаване на $\Phi(\varphi)$, получаваме $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. теоремата на Питагор!



Фиг. 2.1

които освен φ_0 включват неговата дължина $L = |OM|$ и земното ускорение g .



Фиг. 2.2

Пример 2.3 (математическо махало). Разглеждаме люлеенето на тежка точка с маса m , окачена посредством неразтеглива и безтегловна нишка в неподвижна точка O , вж. фиг. 2.2. Началното отклонение на махалото е φ_0 . Интересува ни зависимостта на периода T на люлеенето на махалото OM от основните параметри на задачата,

Да запишем общия закон (2.1) в конкретния случай:

$$f(T, L, g, \varphi_0) = 0, \quad (2.16)$$

и да го „подложим“ на „размерен“ анализ. Забележете, че масата m на точката не участва в (2.16), тъй като нито една от останалите величини не включва M в размерностите си.

Ъгълът φ_0 е безразмерен. От останалите три величини две имат независима размерност, например L и T , т. е. $k = 2$. (Припомняме, че $[g] = LT^{-2}$.) Съгласно II-теоремата законът (2.16) може да се напише в безразмерния вид $f(\pi_1, \varphi_0) = 0$ или

$$\pi_1 = \Phi(\varphi_0), \quad (2.17)$$

където π_1 е безразмерна величина, образувана от L , g и T . В случая това е например величината

$$\pi_1 = \frac{T}{\sqrt{L/g}}.$$

(Проверете, че наистина $[\pi_1] = 1$!) Следователно

$$T = \Phi(\varphi_0) \sqrt{\frac{L}{g}},$$

вж. (2.17), което означава, че

$$T \sim \sqrt{L},$$

т. е. периодът на математическото махало е пропорционален на квадратния корен от неговата дължина. Това е добре познатият закон на Галилей за периода на математическото махало.

Предполагайки началното отклонение малко, $|\varphi_0| \ll 1$, да разложим функцията $\Phi(\varphi_0)$ в ред на Тейлър в околността на $\varphi_0 = 0$:

$$\Phi(\varphi_0) = A + B\varphi_0^2 + \dots$$

(Отчитаме, че $\Phi(\varphi_0)$ е четна функция на φ_0 по очевидни физически съображения.) Следователно при малки колебания

$$T = A\sqrt{\frac{L}{g}} + \mathcal{O}(\varphi_0^2), \quad |\varphi_0| \ll 1.$$

Това означава, че с точност до $\mathcal{O}(\varphi_0^2)$ математическото махало е *изохронно*⁸, т. е. периодът му не зависи от началното отклонение φ_0 .

Пример 2.4 (енергия на атомен взрив) ([41], [2, стр. 31]). При атомен взрив в област, която е толкова малка, че може да се разглежда като точка, много бързо (практически мигновено) се отделя значителна енергия E . От центъра на взрива се разпространява мощна ударна вълна, зад която в началото налягането е стотици хиляди атмосфери — много по-голямо от налягането на въздуха, поради което то може да се пренебрегне. Интересува ни радиусът R_f на фронта на ударната вълна в момент t след взрива.

Параметрите на задачата тук са енергията E и плътността ρ на атмосферата, така че физическият закон (2.1) добива вида

$$f(R_f, t, E, \rho) = 0. \quad (2.18)$$

Размерностите на аргументите са

$$\begin{aligned} [t] &= T, & [\rho] &= ML^{-3}, \\ [R_f] &= L, & [E] &= ML^2T^{-2}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

⁸Това е вярно само при малки φ_0 . При по-големи амплитуди периодът вече зависи от φ_0 , вж. [6, стр. 578].

три от които са независими, $k = 3$. Съгласно II-теоремата съотношението (2.18) може да се „обезразмери“:

$$f(\pi_1) = 0 \quad \text{или} \quad \pi_1 = \text{const},$$

където π_1 е безразмерна комбинация, образувана от четирите аргумента в лявата страна на (2.18).

За да намерим такава комбинация, нека я потърсим във вида

$$\pi_1 = R_f E^\alpha t^\beta \rho^\gamma \quad (2.20)$$

с неизвестни степенни показатели α , β и γ . Те се определят от условието, че π_1 трябва да бъде безразмерно.

Пресмятаме размерността на π_1 :

$$\begin{aligned} [\pi_1] &= [R_f] [E^\alpha] [t^\beta] [\rho^\gamma] \\ &= L \left(M^\alpha L^{2\alpha} T^{-2\alpha} \right) T^\beta \left(M^\gamma L^{-3\gamma} \right) \\ &= L^{1+2\alpha-3\gamma} M^{\alpha+\gamma} T^{\beta-2\alpha}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

вж. (2.19). Величината π_1 ще бъде безразмерна единствено ако степените на L , M и T в последния ред на (2.20) се анулират:

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - 3\gamma &= 0, \\ \alpha + \gamma &= 0, \quad \beta - 2\alpha = 0, \end{aligned}$$

откъдето

$$\alpha = -\frac{1}{5}, \quad \beta = -\frac{2}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{5}. \quad (2.22)$$

Следователно търсената безразмерна комбинация на R_f, t, E, ρ_0 е

$$\pi_1 = R_f \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{-\frac{1}{5}}, \quad (2.23)$$

както следва от (2.20) и (2.22). Оттук

$$R_f = C \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad C = \text{const}. \quad (2.24)$$

Формулата (2.24) показва, че ако се измерва радиусът R_f на ударната вълна в различни моменти на времето t , то в логаритмичните координати $\left(\frac{5}{2} \ln R_f, \ln t \right)$ експерименталните точки трябва да „легнат“ върху правата

$$\frac{5}{2} \ln R_f = \ln t + \frac{5}{2} \ln \left(E^{\frac{1}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}} \right) + \frac{5}{2} \ln C, \quad (2.25)$$

която има единичен наклон. Това е потвърдил Тейлър [41] в резултат на обработката на филма за разпространение на огненото кълбо, заснет по време на първия американски ядрен опит. Както показва един по-подробен газодинамичен анализ, стойността на константата C в (2.24) е близка до единица. Като знаем това, по експерименталната зависимост на радиуса R_f на фронта от времето t може да се определи енергията на взрива E чрез използването на (2.25). Тейлър публикува тази величина, която се оказва приблизително 10^{21} ерга, и така предизвиква, по думите на самия Тейлър, голям смут в американското правителство — тази цифра се е смятала за изключително секретна, макар че филмът за ядрения взрив не е бил засекретен изобщо!

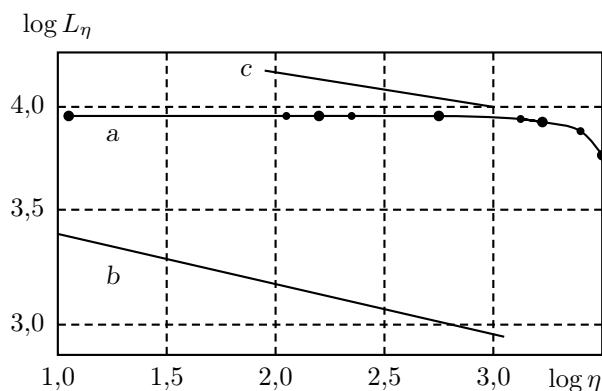
Други съдържателни примери за приложение на „размерния“ анализ и P -теоремата могат да се намерят в книгите на Седов [13], Логан [27] и вече цитираната книга на Баренблатт [2].

2.7. Дробни (фрактални) размерности. Най-често в литературата се подразбира неявно, че показателите ℓ , m и t във формулата (2.2) за размерностите са цели числа. Това обаче далеч невинаги е така. Съществуват многобройни, интересни и важни обекти, чиято размерност е дробна. Това са така наречените *фрактали*.

За да поясним това понятие на съвсем елементарно ниво, ще се върнем към изследванията на Ричардсон [40] от 50-те и 60-те години, който прави опит да измери дължината на британското крайбрежие. За целта е избран метод, който изглежда съвършено естествен поне за гладки криви. Ричардсон използва много подробна карта на крайбрежието. С нейна помощ той го апроксимира с начупена линия, с дължина на отделното звено от линията η , така че всичките ѝ върхове да лежат на брега. Дължината L_η на тази линия се приема за приближение на търсената дължина на крайбрежието за даденото η . Очакването на автора е, че L_η ще клони към определена крайна граница при $\eta \rightarrow 0$, която следва да се приеме за дължина на крайбрежието.

Естествено, така и би се получило, ако апроксимираме гладка крива, например окръжност, със споменатите по-горе начупени линии. Но за разлика от гладките криви крайбрежието се оказало толкова „грапаво“, че дължините L_η не само не клоняли към крайна граница, но неограничено нараствали при намаляването на параметъра η в целия диапазон на използваните му стойности, вж. фиг. 2.3. Нещо повече, зависимостта на L_η от η се апроксимираше чудесно със степенната функция

$$L_\eta = \lambda \eta^{1-D}, \quad \lambda > 0, \quad D > 1. \quad (2.26)$$



Фиг. 2.3. Зависимост на дължината L_η на начупената линия, апроксимираща крайбрежието, от дължината на звеното η [2, стр. 141]

a – окръжност, b – британско крайбрежие, c – австралийско крайбрежие

За отделни части на крайбрежието формулата (2.26) неизменно се потвърждавала, като D оставало едно и също, а се менял само параметърът λ .

Всичко това показва, че понятието дължина на част от крайбрежието, при избора от Ричардсон метод на измерване, няма смисъл само по себе си, доколкото L_η , съгласно (2.26), няма крайна граница при $\eta \rightarrow 0$. В същото време може обаче да се сравняват дължините на две части, за които

$$L_\eta^{(1)} = \lambda^{(1)} \eta^{1-D}, \quad L_\eta^{(2)} = \lambda^{(2)} \eta^{1-D},$$

вж. отново (2.26). Наистина отношението на тези дължини

$$\frac{L_\eta^{(1)}}{L_\eta^{(2)}} = \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}}$$

е безразмерна величина, която не зависи от дължината на звеното на начупената линия η , с чиято помощ „мерим“ крайбрежната линия.

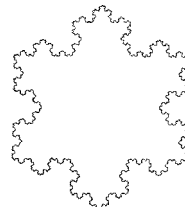
Тук λ е т. нар. хаусдорфова мярка на частта от крайбрежието, D е хаусдорфова или фрактална размерност. За британското крайбрежие $D \approx 1,24$.

Криви, за които е в сила (2.26), се наричат *фрактали* (от латинското „fractus“, което означава дробен).

При аналогично изследване на австралийското крайбрежие се оказало, че формулата (2.26) остава в сила, но фракталната му размерност е вече различна — $D \approx 1,14$, вж. фиг. 2.3.

За илюстриране на това как фракталите се появяват по елементарен и чисто геометричен начин, да споменем класическата и поучителна конструкция, водеща до така наречената *триада на Кох* [26].

Разглеждаме равностранен триъгълник с дължина на страната L . Върху всяка от страните му извършваме т. нар. елементарна операция. В случая тя е следната. Разделяме страната на три равни части и върху средната част издигаме равностранен триъгълник. Получава се дванадесетоъгълник. На следващата стъпка провеждаме същата елементарна операция върху страните на този дванадесетоъгълник и т. н. Получената по горния алгоритъм фрактална крива е именно *триадата на Кох*, вж. фиг. 2.4.



Фиг. 2.4. Триада на Кох

За да се убедим, че това е наистина фрактал, да забележим, че на n -тата стъпка дължината на едно звено от получената по горния алгоритъм начупена линия е

$$\eta = \frac{L}{3^n},$$

а дължината L_η на цялата линия е

$$L_\eta = 3L \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

(Проверете!) При $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, но дължината L_η на начупената линия клони към безкрайност. Записваме (2.27) във вида

$$L_\eta = 3L \left(\frac{L}{\eta}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 3} \approx 0,2618,$$

или

$$\begin{aligned} L_\eta &= \lambda \eta^{1-D}, \quad \lambda = 3L^D, \\ D &= 1 + \alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тук хаусдорфовата мярка има екзотичната размерност $[\lambda] = L^D$, където D е трансцендентното число, дефинирано в (2.28). Вижда се, че нейната фрактална размерност, по една случайност, е много близка до тази на британското крайбрежие.

По-подробна информация за фракталите се съдържа например в известните книги на Манделброт [30] и Барнсли [15].

Глава 2

ЕЛЕМЕНТАРНИ МОДЕЛИ: МОДЕЛИРАНЕ С ПОМОЩТА НА ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

В тази глава ще въведем и обсъдим някои от най-простите класически модели, свързани с популационната динамика, разпространението на епидемии, химическите реакции и др. Моделите са чисто феноменологични, в смисъл че те не изискват осмисляне на спецификата и детайлите на разглежданите процеси и явления. Вместо това се постулира, че скоростта на изменение на параметрите на състояние са прости и интуитивно правдоподобни функции на тези параметри, съдържащи коефициенти (параметри на системата), които следва да се определят допълнително по един или друг начин (например експериментално). Като резултат моделите се формулират с помощта на обикновени диференциални уравнения. Затова и елементарното моделиране, разгледано в тази глава, се нарича често моделиране с помощта на обикновени диференциални уравнения. (В западната литература се използва и терминът „формулиране на модели от словесни задачи“ (*formulating models from word problems* [18, 24]), чийто смисъл би трябвало да стане ясен от текста по-долу, вж. по-специално § 3.1.) Изложението в §§ 3 – 6 се базира основно на глава 2 от [17], откъдето са заимствани и някои от упражненията и историческите бележки.

Централно място в тази глава ще заемат моделите на популационната динамика. Неин предмет е изучаването на биологическите общности, състоящи се от един или няколко биологически вида. Целта, поне в разглежданите класически модели, е в чисто феноменологичното моделиране на влиянието на окръжаващата среда и на разнообразието на взаимодействията между видовете. Класическите модели са дело на Ферхулст (1838), Лотка (1925) (който е биофизик) и преди всичко на Волтера (1926), макар че интересът към популационната динамика се е появил още в началото на 19-ия век като реакция на известния труд на Малтус [29] от 1798. По-подробна информация за съвременното състояние в тази област може да се намери например в книгата [38].

Да отбележим, че по принцип и класическата динамика на материална точка може да се причисли към моделирането с помощта на обикновени диференциални уравнения. Това е очевидно от съотношенията (1.5), описващи движението на точката, които представляват система от такива уравнения. Нещо повече, динамиката на материална точка също може да се формулира като „модел от слова“, а именно от израза „каквато е силата, такова е и ускорението“ (при постоянна маса на точката). Въпреки това динамиката на точка е неуместно да се разглежда подробно тук (като изключим елементарните примери в §4.2, свързани със свободното падане на тяло в съпротивителна среда) поне по две причини. Първата и основна от тях се състои в това, че зад нея стои фундаментален природен закон — вторият закон на Нютон (1.4). Елементарните модели, разглеждани по-долу, се базират, от друга страна, на чисто евристични и емпирични съотношения, зад които не стои нищо фундаментално, а използването им се оправдава единствено с това, че водят до смислени заключения. Втората причина е, че подробното изучаване на динамиката на материална точка е част от класическата аналитична механика, изложена в множество превъзходни съчинения.

§ 3. Закон на Малтус и неговите интерпретации

3.1. Коефициент на прираст. Закон на Малтус. Нека $N = N(t)$ е броят на индивидите в дадена биологическа популация. Считаме, че N е достатъчно голямо, за да разглеждаме $N(t)$ като непрекъснатата функция, игнорирайки очевидния факт, че реално N приема само дискретни стойности. Основното предположение на модела на Малтус се състои в това, че нарастването dN на броя на индивидите за време dt е пропорционално както на този брой, така и на времето dt :

$$dN \approx N dt, \quad (3.1)$$

с коефициент на пропорционалност ε , т. е.

$$dN = \varepsilon N dt, \quad \frac{dN}{dt} = \varepsilon N. \quad (3.2)$$

Забележете как думите „нарастването е пропорционално на броя на индивидите и на (инфинитезималния) интервал от време“, записани математически, „пораждат“ модела (3.2). По същата схема („модел от слова“) ще въведем и всички останали модели в тази глава.

Параметърът ε в (3.2) се нарича *коэффициент на прираст* или *репродуктивен потенциал*. Той представлява основна характеристика на популацията. Ако представим ε във вида

$$\varepsilon = \frac{dN/N}{dt}, \quad (3.3)$$

виждаме, че този параметър определя относителното нарастване (dN/N) на популацията за единица време. Оттук следва, че размерността на ε е „единица върху време“:

$$[\varepsilon] = T^{-1}, \quad (3.4)$$

което лесно се проверява, използвайки (3.3).

В общия случай $\varepsilon = \varepsilon(t, N)$, а в най-простия $\varepsilon = \text{const}$. Тогава, ако $N = N_0$ в началния момент $t = 0$, то решението на диференциалното уравнение (3.2) е

$$N = N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}. \quad (3.5)$$

Това решение съответства на експоненциален ръст на популацията (*закон на Малтус*, 1798).

Да отбележим, че константата ε е свързана по прост начин с времето T за удвояване на популацията, което е *характерното време* за модела. По-точно, ако в интервала $(t, t + T)$ числеността на популацията се увеличи два пъти, то

$$T = \frac{\ln 2}{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

както следва от (3.5).

Фундаменталното заключение, което Малтус¹ извежда от закона (3.5), се състои в това, че човечеството (като биологическа популация) може да съществува само ако периодите на експоненциален ръст се прекъсват от периоди на катастрофални бедствия, т. нар. *малтусиански катастрофи* (епидемии или войни).

Упражнение 3.1. *Предполагаме, че населението на земята $N(t)$ се подчинява на закона на Малтус (3.2). В момент $t = 0$ (1650 г.) населението е $6 \cdot 10^8$ (600 милиона), а в момент $t = 300$ (1950 г.) е $2,8 \cdot 10^9$ (2,8 милиарда). Намерете:*

а) *Коефициента на прираст на човечеството;*

¹Томас Малтус (1766 – 1834) е английски икономист, който пръв забелязва, че много биологични популации се увеличават със скорост, пропорционална на числеността на популацията. Оригиналното есе на Малтус от 1798 г. е препечатвано многократно, вж. например [29]. Разсъжденията му за т. нар. днес малтусиански катастрофи са предизвикали широк отзвук и дискусия през 19-ти век.

б) Ако земята не може да изхрани повече от $25 \cdot 10^9$ (25 милиарда) души, кога най-късно ще настъпи малтусианската катастрофа?

Отг.: а) $\varepsilon \approx 0,01243$; б) през 2376 г.

Ако коефициентът ε в (3.5) е отрицателен, $\varepsilon < 0$, полагаме $\mu = -\varepsilon$. Тогава

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N, \quad \text{т. е.} \quad N = N(t) = N_0 e^{-\mu t}, \quad (3.7)$$

което съответства на експоненциално намаляване на популацията. Параметърът μ в този случай се нарича *коефициент на смъртност*. При това, аналогично на (3.6),

$$T = \frac{\ln 2}{\mu}, \quad (3.8)$$

където T е времето, за което популацията намалява два пъти.

3.2. „Финансова“ интерпретация на модела на Малтус. Лихва и инфлация. „Финансова“ интерпретация на модела на Малтус (3.2) може да потърсим при нарастването на банков влог. Тук

$$dQ = \ell Q dt, \quad (3.9)$$

където ℓ е лихвата, Q — големината на влога, а dQ — нарастването на влога за време dt . В този контекст моделът (3.9) е реалистичен само ако банката начислява лихва непрекъснато. Практиката обаче е лихвата да се начислява „дискретно“, т. е. за определен период от време (например в края на всяка календарна година). Прост анализ ще покаже защо това е по-изгодно за банките.

Ако лихвата се начислява непрекъснато, то влогът нараства експоненциално, $Q(t) = Q_0 \exp(\ell t)$, вж. (3.5), и след n години големината му ще бъде

$$Q_n = Q(n) = Q_0 e^{\ell n}. \quad (3.10)$$

Ако пък лихвата се начислява в края на всяка година, големината на влога след n години е

$$\tilde{Q}_n = Q_0(1 + \ell)^n. \quad (3.11)$$

Но

$$e^{\ell n} > (1 + \ell)^n \quad (3.12)$$

(неравенството на Бернули) и затова

$$Q_n > \tilde{Q}_n.$$

Последното неравенство обяснява защо банките начисляват лихвата на „дискретни“ порции.

Упражнение 3.2. Ако годишната лихва е 5%, пресметнете отношението Q_n/\tilde{Q}_n след 5 и след 10 години.

Отг.: 1,006; 1,012.

„Финансова“ интерпретация на модела на Малтус (3.7) при отрицателен коефициент на възпроизводство е свързана например с намаляването dQ на реалната стойност на дадена сума Q вследствие на инфлация:

$$dQ = -\mu Q dt, \quad \mu = \frac{|dQ/Q|}{dt}.$$

С други думи, μ показва каква част от сумата се „изяжда“ от инфлацията за единица време, срв. (3.3). (Да напомним, че μ , както и лихвата, се измерва в проценти, така че например $\mu = 0,05$ съответства на пет процентова инфлация.)

В едно инфлационно обкръжение инфлацията действа непрекъснато и затова, съгласно (3.7),

$$Q = Q_0 e^{-\mu t}. \quad (3.13)$$

Това означава, че инфлацията „стопява“ експоненциално всеки капитал, независимо от нейния процент.

При инфлация държавата се стреми да компенсира доходите, като увеличава заплатите на „дискретни“ порции (на всеки шест месеца или в края на годината). Ако Q_0 е доходът в началото на периода, то реалната му стойност в края ще бъде $Q_0 \exp(-\mu)$, вж. (3.13), а след индексацията е $Q_0(1 + \mu) \exp(-\mu)$, ако последната е равна на процента на инфлация (което е обичайната практика). Но

$$Q_0(1 + \mu)e^{-\mu} < Q_0 \quad (3.14)$$

съгласно неравенството на Бернули, вж. (3.12). Изводът, който можем да направим от (3.14), се състои в това, че в инфлационно обкръжение индексация на дохода, равна на процента на инфлация, не ни спасява от реално обедняване. (То обаче е незначително, ако инфлацията не е голяма, вж. упражнение 3.3 по-долу.)

Упражнение 3.3. С колко намалява реалният доход при годишна инфлация от 10%, ако индексацията в края на годината е също 10%? А ако инфлацията е 100%?

Отг.: 0,5%; 26,2%.

Упражнение 3.4. Колко процента трябва да бъде индексацията в края на годината за пълна компенсация на дохода, ако годишната инфлация е 10 %. А ако инфлацията е 100 % ?

Отг.: 10,5 %; 171 %.

3.3. Радиационен разпад. Друга интересна интерпретация на уравнението (3.7) е свързана с разпадането на радиоактивни субстанции.

Да напомним, че радиоактивното разпадане представлява химическа реакция, при която даденото вещество се превръща постепенно в две или повече вече нерадиоактивни субстанции. При това е ясно, че колкото е по-голяма масата $M = M(t)$ на веществото, толкова по-голяма е скоростта му на разпадане:

$$\frac{dM}{dt} = -\mu M, \quad \text{т. е.} \quad M = M(t) = M_0 e^{-\mu t}, \quad (3.15)$$

което е напълно аналогично на (3.7). Времето T , за което масата намалява два пъти, се нарича време на полуразпад. Връзката между T и параметъра μ се дава от съотношението (3.8).

Упражнение 3.5. Времето на полуразпад на радий-266 е 1620 години. За колко време дадена маса от това вещество ще намалее с 1/4 ?

Отг.: ≈ 672 год.

Моделът (3.15) играе важна роля в археологическите изследвания. С негова помощ се определя възрастта на вкаменелости. В основата на метода² е фактът, че организмите и растенията по време на жизнения си цикъл акумулират C^{14} (въглерод-14, радиоактивен изотоп на въглерода). След смъртта им този изотоп започва да се разпада. Тъй като времето на полуразпад на C^{14} е голямо (приблизително 5600 год.), то остатъчното му количество може да се определи достатъчно точно след десетки хиляди години. С подходящи лабораторни измервания може да се определи също и началното количество M_0 на изотопа, а чрез него и отношението $M(t)/M_0$. На свой ред формулата (3.15) позволява да определим t , т. е. възрастта на археологическа находка, знаейки това отношение. (Константата μ се определя по известното време T на полуразпад на C^{14} , вж. по-горе, с помощта на (3.8).) Съвременната измервателна техника позволява подобна радиовъглеродна датировка на археологически останки, чиято възраст достига 100 000 год. (Любопитно е, че количеството C^{14} след този период е само $4 \cdot 10^{-6}$ от началното!)

²Методът е разработен от американския химик У. Либи (1908 – 1980) през 50-те години на миналия век. Заради този метод авторът получава нобелова награда за химия за 1960 г.

Упражнение 3.6. В дървесни останки е измерено количество C^{14} , което е 20 % от първоначалното. Определете възрастта им.

Отг.: ≈ 12930 год.

3.4. Стационарни състояния, тяхната устойчивост и неустойчивост. Ще завършим този параграф с две забележки, свързани с качествено поведение на решенията на диференциалните уравнения, описващи разглежданите в тази глава елементарните модели. Тези модели се формулират математически с помощта на (автономното) обикновено диференциално уравнение

$$\frac{dN}{dt} = f(N). \quad (3.16)$$

С такъв най-прост модел, в който функцията $f(N)$ е линейна, вече се сблъскахме по-горе (§ 3.1), вж. (3.2) и (3.7). (Автономност означава, че дясната страна на уравнението (3.16) не зависи явно от времето.)

Специален интерес за нас ще представляват т. нар. *стационарни решения* (или *стационарни състояния*) на модела (3.16), за които

$$N(t) \equiv N^*, \quad N^* = \text{const}. \quad (3.17)$$

Стационарните решения се наричат също и *равновесни*, доколкото те са резултат на равновесието (баланса) на разнообразните въздействия, на които е подложена системата.

Заместването на (3.17) в (3.16) показва, че такива състояния съществуват само ако N^* е корен на уравнението

$$f(N^*) = 0. \quad (3.18)$$

В частност, в модела на Малтус $f(N) = \varepsilon N$, вж. (3.2), и поради това единственото стационарно решение е нулевото, $N^* \equiv 0$.

Ако началното условие е $N_0 = N^*$, то очевидно решението на (3.16) съвпада със стационарното, $N(t) \equiv N^*$, $\forall t \in (0, \infty)$. Интересува ни какво ще стане, ако $N_0 \neq N^*$, т. е. ако системата, по една или друга причина, е *смутена*, т. е. отклонена от стационарното си състояние. Възможностите тук са две:

1) Системата ще остане близо до това състояние, възвръщайки се постепенно към него или колебаейки се около него с неголяма амплитуда. В този случай говорим за *устойчивост* на стационарното решение N^* .

2) Отклонението от стационарното състояние ще започне да нараства неограничено във времето. Това е случаят на *неустойчивост* на стационарното решение.

Дали едно решение е устойчиво или не, може да разберем веднага от аналитичното решение на задачата на Коши за уравнението (3.16) при началното условие $N(0) = N_0$. Например решенията (3.5) и (3.7) показват съответно, че стационарното решение $N^* = 0$ в модела на Малтус е неустойчиво при $\varepsilon > 0$ и устойчиво при $\varepsilon < 0$.

В общия случай, когато $f(N)$ е по-сложна функция, аналитичното решаване на съответната задача на Коши, като правило, е невъзможно. Оказва се обаче, че полезна информация за устойчивостта или неустойчивостта на стационарното решение може да се получи на базата на прост качествен анализ, без познаване на аналитичното решение на уравнението (3.16).

Наистина да предположим, че началното условие N_0 е „леко“ смутено, т. е. малко се отличава от стационарната стойност N^* , $|N^* - N_0| \ll 1$. Търсим решението на уравнението (3.16) във вида

$$N(t) = N^* + n(t), \quad (3.19)$$

като предполагаем, че смущението $n(t)$ също е малко, $|n(t)| \ll 1$. (Поточно, $|n(t)|/N^* \ll 1$.) Заместваме (3.19) в (3.16):

$$\frac{d(N^* + n)}{dt} = \frac{dn}{dt} = f(N^* + n),$$

и разлагаме дясната страна в ред на Тейлър в околността на N^* :

$$\frac{dn}{dt} = f(N^*) + f'(N^*)n + o(n). \quad (3.20)$$

Но $f(N^*) = 0$, вж. (3.18), и за смущението $n(t)$ получаваме уравнението

$$\frac{dn}{dt} = An, \quad A = f'(N^*), \quad (3.21)$$

с точност до безкрайно-малки от по-висок ред спрямо $|n(t)|$. С други думи, ние „линеаризирахме“ диференциалното уравнение (3.16) в околността на стационарното му решение $N(t) \equiv N^*$, като го заменихме с линейното диференциално уравнение (3.21) с постоянния коефициент A .

Решението на уравнението (3.21), при началното условие $n(0) = N_0 - N^*$, е очевидно

$$n(t) = (N_0 - N^*) e^{At}, \quad A = f'(N^*). \quad (3.22)$$

Поведението му се определя от знака на A . Ако $A > 0$, то смущението $n(t)$ нараства експоненциално при $t \rightarrow \infty$, което означава, че стационарното решение е неустойчиво. Ако $A < 0$, то $n(t)$ клони експоненциално

към нула, което говори за устойчивост на разглежданото решение. Ще отбележим, че в случая $A = 0$ не можем да направим никакви заключения за устойчивост или неустойчивост в рамките на проведената линеаризация (3.20) на функцията $f(N)$ в околността на точката N^* . В този случай следва да привлечем в анализа на устойчивостта и членовете от по-висок ред в тейлъровото разлагане (3.20).

3.5. Забележка относно инфлексните точки. Нека $N = N(t)$ е решение на уравнението (3.16). От това уравнение веднага се вижда, че $N' = 0$ единствено, ако $f(N) = 0$. Това означава, че решението $N = N(t)$ може да има локален екстремум само в точките, в които неговата стойност съвпада с някое от стационарните решения на модела (3.16), вж. (3.18).

Да потърсим инфлексните точки на решението $N = N(t)$. За целта диференцираме двете страни на (3.16):

$$\frac{d^2N}{dt^2} = f'(N) \frac{dN}{dt} = f'(N)f(N), \quad (3.23)$$

като използваме още един път (3.16), за да заменим \dot{N} с $f(N)$. От (3.23) следва, че инфлексните точки на всяко решение $N = N(t)$ на (3.16) се достигат единствено в случаите, когато стойността на това решение съвпада или с някоя от стационарните точки на модела (3.16), или пък ако функцията $f(N) = 0$ има екстремум при тази стойност.

§ 4. Охлаждане на телата. Разпространение на заразни болести. Кинетика на химическа реакция

4.1. Охлаждане на телата. Закон на Нютон. Тясно свързан с модела на Малтус, поне от формална гледна точка, е моделът

$$\frac{d\theta}{dt} = -\mu\theta + p, \quad p > 0. \quad (4.1)$$

Единствената разлика от (3.7) е добавянето на константата p в дясната страна на (4.1).

Интерпретацията на (4.1) в контекста на популационната динамика е ясна: ако $\theta = N$ е броят на индивидите в дадена област, то предполагаме, че коефициентът им на смъртност е μ . В същото време обаче, вследствие на миграция от съседните райони, в областта влизат по p нови индивида

за единица време. Подобни модели ще бъдат по-подробно разгледани в § 6 (вж. по-специално упражнение 6.1). Интерпретацията на (4.1), свързана със свободното падане на тела в съпротивителна среда, ще обсъдим в § 4.2.

Тук ще разгледаме друга интересна интерпретация на модела (4.1). Да положим $p = \mu T$ и да напишем (4.1) във вида

$$\frac{d\theta}{dt} = -\mu(\theta - T). \quad (4.2)$$

Оказва се, че в този си вид моделът описва процеса на охлаждане на телата. Именно, ако θ е температурата на повърхността на нагрятото тяло, а T е температурата на околната среда ($T < \theta$), то скоростта на охлаждане $\dot{\theta}$ е пропорционална на разликата $\theta - T$: колкото е по-горещо тялото и в колкото по-хладно обкръжение се намира, толкова по-бързо е изстиването му. Но това именно е записано математически в уравнението (4.2), известно като *закон на Нютон за охлаждането*.

Моделът (4.2) има единствена стационарна точка $\theta = T$, която е устойчива. (Проверете!)

Нека $\theta = \theta_0$ при $t = 0$. Забелязваме, че (4.2) е линейно нехомогенно диференциално уравнение и затова общото му решение има вида

$$\theta(t) = C e^{-\mu t} + T$$

(общото решение на хомогенното уравнение, $\theta_1(t) = C \exp(-\mu t)$, плюс очевидното частно решение $\theta = T$ на нехомогенното уравнение). Интеграционната константа C намираме от началното условие $\theta(0) = \theta_0$. Окончателно законът за охлаждане на тялото се оказва експоненциален във времето:

$$\theta(t) = (\theta_0 - T) e^{-\mu t} + T. \quad (4.3)$$

Впрочем ако температурата на околната среда T е по-висока от тази на тялото θ , то моделът (4.2) вместо охлаждане ще описва процеса на *затопляне*. Температурата на тялото ще се подчинява отново на (4.3), но в разглеждания случай тя ще расте монотонно (защото $\theta_0 < T$), като клони към T отдолу при $t \rightarrow \infty$.

Пример 4.1. Горещо кафе с температура 90°C е налято в чаша в неизвестен момент от време. В 16^{00} ч. температурата на кафето е 70°C , а в 16^{15} ч. — 40°C . Температурата в стаята е 20°C . Кога е налято кафето?

Решение: В случая $\theta_0 = 90^\circ\text{C}$, а $T = 20^\circ\text{C}$. Кафето е налято в момент $t = 0$. В момент x , съответстващ на 16^{00} ч., температурата е

70°C, т. е.

$$70 = 70 e^{-\mu x} + 20. \quad (4.4)$$

В момент $x + 1/4$, съответстващ на 16¹⁵ ч., температурата е 40°C, т. е.

$$40 = 70 e^{-\mu(x+1/4)} + 20. \quad (4.5)$$

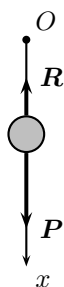
Уравненията (4.4) и (4.5) представляват система за определяне на неизвестните x и μ . Решаването ѝ е елементарно и окончателният резултат е

$$\mu \approx 4,92 \text{ 1/час}, \quad x \approx 0,07 \text{ ч.} \approx 4 \text{ мин.}$$

Това означава, че кафето е налято в 15⁵⁶ ч.

Горният пример подсказва как моделът на охлаждането на Нютон може да се използва и в криминологията за точно определяне на момента на настъпване на смъртта на топлокръвен организъм.

4.2. Свободно падане на тежко тяло в съпротивителна среда. Освен охлаждане, моделът (4.1) описва и свободното падане на телата при едновременното действие на тежестта и на съпротивителна сила.



Фиг. 4.1

Нека тяло с маса m пада по вертикалната ос Ox в близост до земната повърхност под действие на собствената си тежест P . (Напомниме, че $P = mg$, където g е земното ускорение.) Тялото се движи в газообразна (въздух, например) или течна среда. Вследствие на това върху него действа освен силата на тежестта и съпротивителна сила R , насочена противоположно на теглото, вж. фиг. 4.1. Съгласно втория закон на Нютон (1.4) уравнението на движение на тялото има вида

$$m \frac{dv}{dt} = P - R. \quad (4.6)$$

Големината на съпротивителната сила зависи от скоростта на движението v :

$$R = R(v). \quad (4.7)$$

При неголеми скорости на движение може да се предположи, че R е пропорционална на v :

$$R = kmv, \quad (4.8)$$

с коефициент k , който зависи от размерите на тялото и от свойствата на съпротивителната среда³.

От (4.6) и (4.8) следва уравнението

$$\frac{dv}{dt} = -kv + g, \quad (4.9)$$

което съвпада с това на модела на Нютон (4.1) за охлаждане на телата. Разликата е единствено в интерпретацията на участващите в двата модела параметри.

Решението на уравнението (4.8) при началното условие $v(0) = v_0$ е

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{g}{k}\right) e^{-kt} + \frac{g}{k}, \quad (4.10)$$

срв. (4.3). Видно е, че независимо от началната скорост v_0 , скоростта клони при $t \rightarrow \infty$ към една постоянна *гранична скорост*

$$v_\infty = \frac{g}{k},$$

съвпадаща очевидно със стационарното решение на модела (4.8). Това означава, че съпротивителната сила (4.8) „превръща“ равноускорителното движение на падащо тяло в равномерно при $t \rightarrow \infty$. В упражнението 4.3 се вижда впрочем, че това свойство е характерно за произволна съпротивителна сила, а не само за стоксовата.

Упражнение 4.1 (задача на Нютон). *При движение на тяло във въздух е установено, че линейният (стоксовият) закон (4.8) е приемлив при скорости, непревишаващи 10 cm/s. При по-големи скорости зависимостта на съпротивлението от скоростта се апроксимира добре с квадратичната зависимост*

$$R = mgk^2 v^2. \quad (4.11)$$

Запишете уравнението на модела (4.6) в този случай. Кои са стационарните решения и каква е интерпретацията им? Какъв е законът на движение на падащото тяло, ако то е пуснато в момент $t = 0$ без начална скорост? Каква е размерността на параметъра k в (4.11) и как се интерпретира той?

$$\text{Отг.: } v = v(t) = \frac{1}{k} \operatorname{th}(kgt); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v = v_\infty, \quad v_\infty = \frac{1}{k}.$$

³Съотношението (4.8) е известно като закон на Стокс и обосновката му може да се намери в курсовете по хидромеханика. Съпротивителна сила от вида (4.8) се нарича стоксова. Коя скорост е „малка“ зависи обаче от свойствата на средата, вж. упражнение 4.1.

Упражнение 4.2. Две тежки кълба с еднакви радиуси и маси m_1 и m_2 падат вертикално надолу в среда, чието съпротивление е пропорционално на квадрата на скоростта. Покажете, че е в сила законът на Мариот

$$\frac{v_\infty^1}{v_\infty^2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

т. е. граничните скорости на падане на двете кълба, v_∞^1 и v_∞^2 , се отнасят както корените на масите им.

Упражнение 4.3. Нека (4.7) е зависимостта на съпротивлението от скоростта на движението на тялото. Предполагаме, че $R(v)$ е монотонно растяща функция на v , като $R(0) = 0$ и $R(\infty) = \infty$. Убедете се, че и в този по-общ случай съпротивлението „превърща“ равноускорителното движение на падащо тяло в равномерно със скорост v_∞ при $t \rightarrow \infty$. Как се намира v_∞ ?

4.3. Разпространение на заразни заболявания (без изолация на заразените). Разглежда се популация от N индивида. От тях X са не само болни, но и предават зараза при контакт със здравите, чийто брой е Y . Означаваме с $x = X/N$ и $y = Y/N$ частта на болните и на здравите индивиди съответно, като $x + y = 1$. Приемаме, че болните не се изолират и свободно контактуват със здравите. Като следствие скоростта на разпространение на заразата е пропорционална на броя на тези контакти, т. е. на произведението $xy = x(1 - x)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(x) = \alpha x(1 - x), \quad (4.12)$$

с положителна константа α , характерна за даденото заболяване.

Моделът (4.12) описва динамиката на епидемия, при която заразените не се изолират. Стационарните точки на модела са две: $x = 0$ и $x = 1$, при това

$$f'(0) > 0, \quad f'(1) < 0,$$

т. е. първата от тях е неустойчива, а втората — устойчива, вж. § 3.4. Функцията $f(x)$ е положителна при $x \in (0, 1)$ (скицирайте графиката ѝ). Следователно, ако в началния момент $x(0) = x_0$, то решението $x(t)$ на уравнението (4.12) ще расте монотонно, като асимптотично ще клони надолу към стационарната стойност $x = 1$. Това означава, че ако заразно болните не се изолират своевременно, епидемията ще обхване в крайна сметка цялото население (напълно естествено заключение, разбира се).

4.4. Разпространение на заразни заболявания (при изолация на заразените). Нека сега $y = y(t)$ е частта от популацията, която е носител на зараза. Не е задължително заразата да се прояви веднага, тя може да е и в латентна форма, но въпреки това да се пренася при контакт. Нека $x = x(t)$ е частта, която е податлива на заразата.

Да предположим, че за ограничаване на епидемията носители на зараза се идентифицират и изолират със скорост μ . Това означава, че броят им се подчинява на малтусовото уравнение (3.7):

$$\frac{dy}{dt} = -\mu y, \quad \text{т. е.} \quad y = y(t) = y_0 e^{-\mu t}, \quad (4.13)$$

където y_0 са носителите на заразата в началния момент на епидемията $t = 0$.

Както и в § 4.3 приемаме, че разпространението на заразата сред податливата част $x = x(t)$ на популацията е пропорционална на контактите ѝ с носителите:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha xy, \quad (4.14)$$

с положителна константа α .

Заместваме (4.13) в (4.14):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha xy_0 e^{-\mu t}.$$

Променливите в последното уравнение се разделят:

$$\frac{dx}{x} = \alpha y_0 e^{-\mu t} dt,$$

и след интегриране на двете страни получаваме

$$\ln x = -\frac{\alpha y_0}{\mu} e^{-\mu t} + C.$$

Интеграционната константа C определяме от началното условие $x(0) = x_0$, където x_0 е частта от популацията, която в момент $t = 0$ вече проявява признаци на заболяването. Оттук

$$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{\alpha y_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

и окончателно

$$x = x(t) = x_0 \exp \left[\frac{\alpha y_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right]. \quad (4.15)$$

Функцията (4.15) описва динамиката на разпространението на епидемията. Лесно е да се забележи, че $x(t)$ е монотонно растяща функция на времето t и затова

$$x_{\max} = x(\infty) = x_0 \exp\left(\frac{\alpha y_0}{\mu}\right). \quad (4.16)$$

Оттук се вижда, че колкото е по-голямо μ , т. е. колкото по-бързо се изолират носителите на заразата, толкова по-ограничена е епидемията (x_{\max} е по-малко). В идеалния случай $\mu = \infty$ тези носители се изолират веднага; тогава $x_{\max} = x_0$ и разпространение на заразата няма.

4.5. Модел на Бернули. В средновековието едрата шарка (вариолата) е била широко разпространено заразно заболяване, което често е водило до фатален изход. През 18-ти век започват първите опити за имунизация, но те, като нещо съвсем ново и все още неапробирано, срещат силна съпротива. Това подтиква Даниил Бернули, в свой известен труд от 1760 г., да построи модел на разпространение на едрата шарка, чрез който аргументирано да защити или да отхвърли имунизацията.

Разсъжденията на Бернули са следните. Да разгледаме група от индивиди, родени в дадена година ($t = 0$). Нека $N(t)$ е броят на тези, които са оцеляли след t години. Нека $X(t)$ е броят на индивидите, които до същата година t не са се заразили от едра шарка, но са податливи на болестта. Означаваме с β скоростта, с която податливите се заразяват (т. е. броя на новозаболените за единица време спрямо броя на всички податливи). Тогава скоростта dX/dt , с която броят на податливите (но все още здрави) индивиди намалява, се дава от съотношението

$$\frac{dx}{dt} = [-\beta + \mu(t)]x. \quad (4.17)$$

Тук $\mu(t)$ е коефициентът на смъртност, причините за която не са свързани с едрата шарка.

Да означим с ν коефициента на смъртност сред заболелите от едра шарка. Скоростта на намаляване на броя на индивидите от избраната група е

$$\frac{dN}{dt} = -\nu\beta X - \mu(t)N. \quad (4.18)$$

Да поясним: към смъртността $\mu(t)N$ добавяме смъртността $\nu\beta X$, причинена от едрата шарка (βX са заболелите, а $\nu\beta X$ са починалите сред тях за единица време). Оттук впрочем се вижда, че $\nu < 1$.

Нека

$$z = z(t) = \frac{X(t)}{N(t)} \quad (4.19)$$

е частта на незаболелите от едра шарка спрямо броя на оцелялите от групата след t години. С помощта на (4.18) и (4.19) лесно се проверява, че $z(t)$ е решение на диференциалното уравнение⁴

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \quad f(z) = -\beta z(1 - \nu z). \quad (4.20)$$

При това

$$z(0) = 1. \quad (4.21)$$

(В годината на раждането ($t = 0$) едра шарка сред членовете на групата още няма и затова $X(0) = N(0)$.)

Моделът (4.20) има две стационарни точки $z = 0$ и $z = 1/\nu$, като само първата е устойчива. (Втората няма физически смисъл, тъй като $z \leq 1$, а $\nu < 1$, вж. по-горе.)

При $z \in (0, 1)$ функцията $f(z)$ в дясната страна на уравнението (4.20) е отрицателна, решението $z = z(t)$ намалява, като клони към стационарната стойност $z = 0$. Това означава, че ако индивидът живее достатъчно дълго, той рано или късно ще се разболе от едра шарка, ако е податлив, но не е имунизиран.

Упражнение 4.4. Намерете решението на задачата на Коши (4.20), (4.21).

$$\text{Отг.: } z(t) = \frac{1}{\nu + (1 - \nu)e^{\beta t}}. \quad (4.22)$$

Упражнение 4.5. По оценка на Бернули, $\nu = \beta = 1/8$. Като използвате решението (4.22), намерете относителния брой на 20-годишните, които не са боледували от едра шарка.

Отг.: $\approx 0,093$, т. е. по-малко от 10 %.

Като използва модела (4.20) и данни за смъртността, налични през втората половина на 18-ти век, Бернули стига до извода, че имунизацията срещу едрата шарка би увеличила средната продължителност на

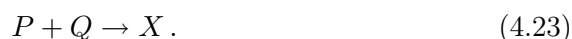
⁴Уравнението (4.20) е прототип на по-общото уравнение

$$z' + p(t)z + q(t)z^\alpha = 0,$$

наречено днес уравнение на Бернули. (В чест обаче на Якоб Бернули, чичото на Даниил, който пръв въвежда това уравнение през 1690 г. при решаването на задачата за изохроната.)

живот (26 год. и 7 месеца по онова време) приблизително с три години. Поради това той категорично подкрепя проекта за имунизация.

4.6. Кинетика на химическа реакция. Ще завършим този параграф с още един елементарен модел, свързан този път с кинетиката на химическа реакция. В случая се разглежда взаимодействието на две субстанции (реактанти) — молекули от видовете P и Q . В резултат на взаимодействието им се появяват молекулите на нова субстанция X , за което използваме означението



Нека p и q са съответно началните концентрации на P и Q и нека $x = x(t)$ е концентрацията на новата субстанция X в момента t . Тогава $p - x(t)$ и $q - x(t)$ са текущите концентрации на реактантите. Предполагаме, че скоростта на реакцията (4.23) е пропорционална на тези концентрации, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f(x) = \alpha(p - x)(q - x), \quad (4.24)$$

където $\alpha > 0$ е константа, характерна за разглежданата реакция.

Нека $x(0) = 0$, т. е. реакцията започва в момент $t = 0$. Графиката на функцията $f(x)$, вж. (4.24), представлява парабола, като $f(x) > 0$ при $0 < x < p$ (предполагаме, че $0 < p < q$). Това означава, че концентрацията $x(t)$ на новата субстанция X расте монотонно, като клони отдолу към p . Забележете, че $x(t)$ не може да надвишава p , защото $p - x(t)$ трябва да е неотрицателно (макар че, чисто формално, можем да разглеждаме модела (4.24) и в случая $x(t) > p$, но той, поне в обсъждания химически контекст, няма реален смисъл).

Упражнение 4.6. Намерете решението на (4.24) и потвърдете обсъдената току-що качествена картина на решението при $x(t) < p$.

Упражнение 4.7. Нека $p = q$. Уравнението (4.24) в този случай има вида

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2. \quad (4.25)$$

Ако $x(0) = 0$, каква е качествената картина на решението? Потвърдете я, като проинтегрирате (4.25).

Любопитно е да отбележим, че формално уравнението (4.23), описващо химическа реакция, може да се сведе до модела (4.12), свързан с разпространение на епидемия в най-простия случай (§ 4.3). Именно, да

въведем в (4.23) вместо x променливата

$$z = \frac{q - x}{q - p}, \quad \text{т. е.} \quad x = q - (q - p)z. \quad (4.26)$$

Спрямо z уравнението (4.23) приема вида

$$\frac{dz}{dt} = az(1 - z), \quad a = \alpha(q - p), \quad (4.27)$$

което съвпада с (4.12). В случая обаче z се мени в интервала

$$\left(1, \frac{q}{q - p}\right),$$

вж. (4.26), а началното условие е

$$z(0) = z_0 = \frac{q}{q - p} > 1 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Решението на (4.27) тогава ще намалява монотонно при $t \rightarrow \infty$, като кло-ни към стационарната стойност $z = 1$ (съответстваща, съгласно (4.26), на $x = p$).

Казаното дотук означава, че моделът (4.12) може да се разглежда при начални условия както по-малки, така и по-големи от единица. В първия случай той описва разпространение на епидемия, а във втория (след субституцията (4.26)) — химическа реакция.

§ 5. Лимитирани популации

5.1. Лимитирани популации. Да се върнем към най-простия популационен модел на Малтус (3.2), предсказващ експоненциален ръст на броя на индивидите. Такъв ръст, разбира се, е факт в самото начало на развитие на всяка популация, но той не може да трае дълго. Естествените източници на храна, пространството, водата и пр. са винаги ограничени и това ограничава по естествен път броя на индивидите, без да се налагат „малтусиански катастрофи“. Този факт се отчита в популационните модели, като вместо константно ε се въвежда зависимост на коефициента на прираст от броя на индивидите N , например от вида

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_0 (1 - L(N)), \quad \varepsilon_0 > 0, \quad (5.1)$$

т. е.

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon_0 (1 - L(N)) N. \quad (5.2)$$

Такива популации се наричат *лимитирани*. Тук $L(N)$ е функцията на лимитирането, специфична за всеки конкретен модел, вж. (5.10) по-долу. Естествените изисквания към тази функция са:

- а) $L(0) = 0$ — при малка численост лимитирането е пренебрежимо;
- б) $dL/dN > 0$ — лимитиращото въздействие нараства при увеличаване числеността на популацията, т. е. $L(N)$ е монотонно нарастваща функция на N , като $L(\infty) = \infty$.

Освен нулевото решение $N \equiv 0$, нетривиалните стационарни точки на модела (5.2) са решения на уравнението

$$L(N^*) = 1. \quad (5.3)$$

От свойствата на функцията на лимитирането $L(N)$ е видно, че решението на това уравнение съществува и е единствено. Нещо повече,

$$f'(N^*) = \varepsilon_0 \underbrace{(1 - L(N^*))}_{=0} - \varepsilon_0 N^* L'(N^*) < 0,$$

вж. (5.3) и свойството б) на функцията $L(N)$. Това гарантира устойчивостта на нетривиалното стационарно решение N^* . (Тривиалното е винаги неустойчиво — проверете!)

5.2. Логистичен модел на Ферхулст. Класическият и най-прост модел на лимитирана популация е предложен от Ферхулст [42] още през 1838 г.:

$$L(N) = \gamma N, \quad \gamma = 1/K, \quad (5.4)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= f(N), \\ f(N) &= \varepsilon_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Константата K тук ограничава числеността на популацията като следствие на ограничеността на хранителните ресурси. Поради това тя се нарича *ниво на насищане* или *капацитет на средата*. Константата γ , вж. (5.4), се нарича *коэффициент на вътрешна конкуренция* или *коэффициент на самоотравяне*.

Стационарните решения на модела (5.5) са две:

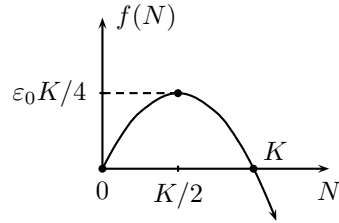
$$N^* \equiv 0, \quad N^* \equiv K,$$

като корени на уравнението $f(N^*) = 0$, вж. (5.5). При това

$$f'(0) = \varepsilon_0, \quad f'(K) = -\varepsilon_0.$$

Съгласно казаното в § 3.4 решението $N \equiv 0$ е неустойчиво, а решението $N \equiv K$ — устойчиво (факт, който е в сила за произволен модел на лимитирана популация, вж. § 5.1). Това в случая ще се потвърди както от съответното аналитично решение, така и от качествените разсъждения, към които преминаваме.

Графиката на функцията $f(N)$ в дясната страна на (5.5) е параболата, показана на фиг. 5.1. Тя е положителна при $0 < N < K$. Това говори, че ако началното условие $N(0) = N_0 < K$, то решението $N(t)$ на уравнението (5.5) расте. При приближаването на $N(t)$ към капацитета на средата K скоростта $N'(t)$ намалява и за това правата $N = K$ е хоризонтална асимптота на решението, към която то клони отдолу. Нещо повече, това решение представлява S -образна крива, чиято инфлексна точка съответства на момента, при който $N = K/2$. В този момент функцията $f(N)$ достига максималната си стойност и популацията расте най-бързо, вж. (5.5) и § 3.5.



Фиг. 5.1

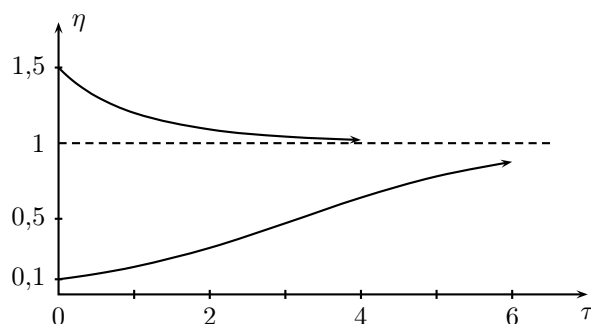
Аналогично, функцията $f(N)$ при $N > K$ е отрицателна, вж. фиг. 5.1. В този случай решението $N(t)$, съответстващо на началното условие $N(0) = N_0 > K$, клони към същата асимптота $N = K$, но този път отгоре.

Тези качествени факти се потвърждават и от аналитичното решение на уравнението (5.5) при началното условие $N(0) = N_0$, което в случая се намира елементарно:

$$N(t) = K \left[1 - \left(1 - \frac{K}{N_0} \right) e^{-\varepsilon_0 t} \right]^{-1}. \quad (5.6)$$

Въвеждаме нормираната численост на популацията η и безразмерното време τ , както следва:

$$\eta = \frac{N}{K}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (5.7)$$



Фиг. 5.2. Зависимост на нормираната численост $\eta = N/K$ от безразмерното време τ на системата в модела на Ферхулст (5.5) при различни начални условия η_0

където $T = \ln 2/\varepsilon_0$ е характерното време за модела, вж. (3.8), т. е. времето, за което популацията би се удвоила, ако не беше лимитирана. Тогава (5.6) приема вида

$$\eta(\tau) = \left(1 + \frac{1 - \eta_0}{\eta_0 2^\tau}\right)^{-1}, \quad \eta(\tau) \Big|_{\tau=0} = \eta_0. \quad (5.8)$$

Две от кривите (5.8), съответстващи на началните стойности $\eta_0 = 0, 1$ и $\eta_0 = 1, 5$, са показани на фиг. 5.2.

В литературата моделът (5.5) е известен и като *логистичен* или още *модел на Ферхулст-Пърл*⁵.

Да обърнем внимание, че спрямо нормираната популация $\eta = N/K$ моделът (5.5) се записва във вида

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon_0 \eta (1 - \eta). \quad (5.9)$$

Очевидно е съвпадението между (5.9) и уравнението (4.12), описващо разпространение на заразни заболявания (без изолация на заразените). Но в разглеждания тук модел променливата η може да приема произволни положителни стойности за разлика от (4.12), където x (частта на болните сред популацията) не може да превишава 1.

⁵П. Е. Ферхулст (1804 – 1849) е белгийски математик. Той въвежда през 1838 г. уравнението (5.5) като модел за ръста на населението на земята, по-реалистичен от малтусовия. Ферхулст нарича ръста на популацията, подчиняващ се на (5.5), логистичен, което и дава наименованието на модела. Поради липса на точни данни от преброявания той не е в състояние да провери адекватността на своя модел. Статията му остава незабелязана почти един век, до работата на Пърл [33], в която предсказанието на модела на Ферхулст намират разумно потвърждение за популации на плодовата муха (*Drosophila melanogaster*).

Упражнение 5.1. Логистичният модел е приложен от ихтиолози за оценка на количеството биомаса в отделни райони на Тихия океан. За един от тях параметрите на модела са оценени като $\varepsilon_0 = 0,71/\text{год.}$ и $K = 80,5 \cdot 10^6 \text{ kg}$. Намерете: а) биомасата след две години, ако в началния момент тя е $0,25 K$; б) след колко време биомасата ще нарасне до $0,75 K$?

$$\text{Отг.: а) } \frac{K}{1 + 3e^{-2\varepsilon_0}} \approx 0,58 K \approx 46,66 \cdot 10^6 \text{ kg; б) } t = \ln 9/\varepsilon_0 \approx 3,09 \text{ год.}$$

При изучаване на лимитирани популации се използват и други модели, съответстващи на различни функции $L(N)$, избрани на базата на едни или други емпирични или евристични съображения. Освен логистичният, вж. (5.5), по-често срещани са следните:

$$\begin{aligned} L(N) &= \gamma \ln N && \text{модел на Гомперц;} \\ L(N) &= \gamma N^\alpha && \text{степенен модел;} \\ L(N) &= \gamma(\ln \alpha N + 1) && \text{логаритмичен модел;} \\ L(N) &= \frac{\alpha}{\gamma - N} - \frac{\alpha}{\gamma} && \text{хиперболичен модел.} \end{aligned} \quad (5.10)$$

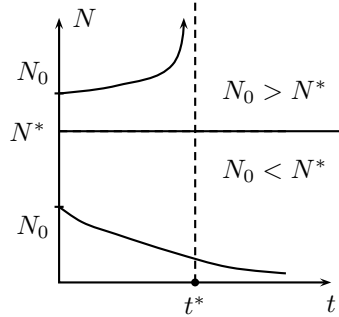
Да отбележим, че исторически моделът на Гомперц [22] от 1825 г. предхожда този на Ферхулст. Това е първият модел, в който се появява идеята за лимитирането, и за целта се предлага конкретна функция (логаритмичната), вж. [11] за повече подробности. Експериментите с конкретни популации показват, че „насищането“ в модела на Гомперц е много по-бавно от наблюдаваното и поради това той е неприложим в популационната динамика. Оказва се обаче, че този модел описва много добре ръста на тъкани и туморни образувания в организмите.

5.3. Лимитирани популации с граница на оцеляване. Чисто формално за момента, да сменим знака на функцията $f(N)$ в модела на Ферхулст (5.5):

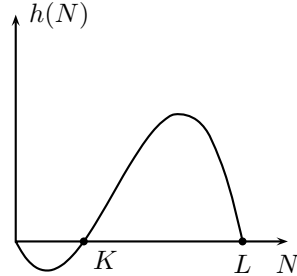
$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= g(N), \\ g(N) &= -\varepsilon_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad \varepsilon_0 > 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Критичните точки са отново същите: $N^* = 0$ и $N^* = K$, но в случая

$$f'(0) = -\varepsilon_0, \quad f'(K) = \varepsilon_0,$$



Фиг. 5.3



Фиг. 5.4

т. е. нулевото решение е устойчиво, а $N \equiv K$ е неустойчиво. Ако $0 < N_0 < K$, то $g(N_0) < 0$ и решението $N(t)$ намалява, като клони към нула. Ако $N_0 > K$, то $g(N_0) > 0$ и решението $N(t)$ расте. Характерът на този ръст можем да определим обаче само след като решим съответната задача на Коши за уравнението (5.11).

Но нужното решение можем да запишем веднага, като сменим знака на ε_0 в (5.6) и съответно в (5.8). Спрямо безразмерните променливи (5.7) то ще бъде

$$\eta(\tau) = \left(1 + \frac{1 - \eta_0}{\eta_0} 2^\tau\right)^{-1}, \quad \eta(\tau) \Big|_{\tau=0} = \eta_0. \quad (5.12)$$

От (5.12) се вижда, че ако $\eta_0 < 1$ (т. е. ако $N_0 < K$), имаме $\eta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, съгласно очакванията ни. Ако обаче $\eta_0 > 1$ (т. е. $N_0 > K$), изразът в скобата в (5.12) се анулира при

$$\tau^* = \ln \frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}.$$

Това означава, че решението (5.12) има вертикална асимптота

$$t = t^*, \quad t^* = \frac{\tau^* \ln 2}{\varepsilon_0},$$

вж. (5.7), т. е. то се изражда в краен момент от време. Нейното съществуване обаче не може да се забележи в рамките на елементарния анализ на устойчивостта в първо приближение, използван по-горе. Поведението на решенията на модела (5.11) е илюстрирано схематично на фиг. 5.3.

Подобно „препълване“ на популацията за краен интервал от време, разбира се, е нереалистично. Моделът (5.11) илюстрира обаче една

важна особеност на някои популации, а именно, съществуване на граница на оцеляване. Това е критичният брой индивиди, необходими за поддържане на съществуването на вида.

За адекватното описание на този феномен е необходимо да коригираме нереалистичното поведение на модела (5.11) при $N > K$. Най-простият начин да направим това е да въведем в дясната страна на (5.11) множител, който да бъде отрицателен при големи N и по този начин да гарантира намаляване на решението:

$$\frac{dN}{dt} = h(N),$$

$$h(N) = -\varepsilon_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(1 - \frac{N}{L}\right) N, \quad (5.13)$$

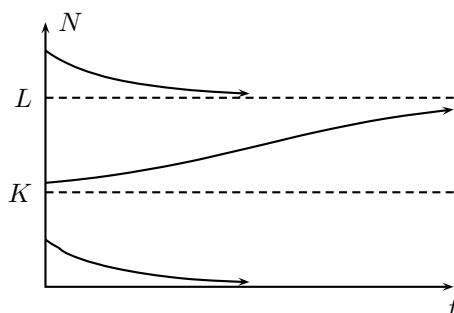
$$\varepsilon_0, K, L > 0, \quad 0 < K < L.$$

Графиката на функцията $h(N)$ е показана на фиг. 5.4. Стационарните точки на модела са три:

$$N^* = 0, \quad N^* = K, \quad N^* = L,$$

като само средната ($N^* = K$) е неустойчива. Прост „геометричен“ анализ, основан на съзерцанието на графиката на фиг. 5.4, води до качествената картина на решенията на (5.13) при различни начални данни, показана на фиг. 5.5. Очевидно е, че K може да се интерпретира като ниво на оцеляване, в смисъл че при $N_0 < K$ популацията изчезва. При $N_0 > K$ поведението на решението е същото както и в модела на Ферхулст: съществува ниво на насищане L . Ако броят на индивидите в началния момент превишава L , то храната е недостатъчна и те намаляват. Ако пък този брой не надвишава L , но е по-голям от K , то популацията се множи. И в двата случая $N(t)$ клони към нивото на насищане L .

Ще отбележим в заключение, че моделът (5.13) не е формално упрощение. Пример за популация с граница на оцеляване е т. нар. пощенски гълъб, широко разпространен в САЩ през 19-ти век. В резултат на интензивно ловуване броят на тези гълъби драстично намалява и през 80-те години на века е наложена забрана за отстрелването му. Тази забрана изглежда идва твърде късно. Макар че броят на останалите гълъби като цяло в страната не е малък, те не могат да се концентрират в достатъчно количество в отделен район за успешно размножаване и в началото на 20-ти век този вид изчезва [17, стр. 68].



Фиг. 5.5

§ 6. Популяция сред хищници

6.1. Популяция сред хищници. Ръстът на популация е възпрепятстван не само от изчерпването на хранителните ресурси (§ 5.1), но и от факта, че тя никога не е изолирана. В едно враждебно обкръжение съществуват „хищници“, които унищожават p екземпляра от популацията за единица време. В най-простия модел числеността на популацията ще се диктува от диференциалното уравнение

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad f(N) = \varepsilon_0 N - p, \quad \varepsilon_0, p = \text{const}, \quad (6.1)$$

с началното условие

$$N \Big|_{t=0} = N_0. \quad (6.2)$$

Единственото стационарно решение на уравнението (6.1) е

$$N^* = \frac{p}{\varepsilon_0} \quad (6.3)$$

(анулирана е функцията $f(N)$ в (6.1)). Очевидно

$$A = f'(N^*) = \varepsilon_0 > 0,$$

което означава, че решението (6.3) е неустойчиво, вж. § 3.4.

За да решим (6.1), забелязваме, че това е линейно нехомогенно диференциално уравнение. Едно частно решение се дава от (6.3). Общото решение на хомогенното уравнение $N' = \varepsilon_0 N$ е $N(t) = C \exp(\varepsilon_0 t)$. Следователно общото решение на (6.1) е сумата от общото решение на хомогенното уравнение и на частното решение (6.3), т. е.

$$N(t) = C e^{\varepsilon_0 t} + \frac{p}{\varepsilon_0}, \quad C = \text{const}. \quad (6.4)$$

(До същия резултат ще достигнем и ако разделим променливите в (6.1).) Интеграционната константа C намираме от началното условие (6.2):

$$C + \frac{p}{\varepsilon_0} = N_0, \quad C = N_0 - \frac{p}{\varepsilon_0},$$

и окончателно

$$N(t) = \left(N_0 - \frac{p}{\varepsilon_0} \right) e^{\varepsilon_0 t} + \frac{p}{\varepsilon_0}. \quad (6.5)$$

С това задачата на Коши (6.1), (6.2) е решена.

Поведението на решението (6.5) зависи от знака на $N_0 - p/\varepsilon_0$ или, еквивалентно, от знака на $N_0\varepsilon_0 - p$. Именно,

$$\text{ако } N_0\varepsilon_0 - p > 0, \quad \text{то } N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty, \quad (6.6a)$$

т. е. наблюдава се неограничен ръст на популацията.

$$\text{Ако } N_0\varepsilon_0 - p < 0, \quad \text{то } N(t) = 0 \text{ при } t = t^*, \quad (6.6b)$$

където

$$t^* = \frac{1}{\varepsilon_0} \ln \frac{p}{p - N_0\varepsilon_0}, \quad (6.7)$$

т. е. популацията изчезва при $t > t^*$.

Да отбележим за пълнота, че

$$\text{ако } N_0\varepsilon_0 - p = 0, \quad \text{то } N(t) \equiv \frac{p}{\varepsilon_0}, \quad \forall t \in (0, \infty),$$

т. е. числеността на популацията се запазва постоянна и равна на равновесната ѝ стойност N^* , вж. (6.3), ако в началния момент $N_0 = N^*$.

Интерпретацията на горните резултати е очевидна. Величината $N_0\varepsilon_0$ е (вътрешната) скорост на нарастване на популацията в началния момент; p е скоростта на намаляването ѝ (вследствие на обкръжаващите я хищници). „Съдбата“ на популацията е в „ръцете“ на разликата

$$N_0 - N^* = \frac{1}{\varepsilon_0} (N_0\varepsilon_0 - p).$$

Ако тази разлика е положителна, то популацията се възпроизвежда по-бързо, отколкото бива унищожавана, и резултатът е малтусиански (експоненциален) ръст. Ако $N_0 - p/\varepsilon_0 < 0$, то възпроизводството не може да компенсира унищожаването и популацията изчезва след определен краен интервал от време. Ако $N_0 - p/\varepsilon_0 = 0$, то унищожаването изцяло се компенсира от възпроизводството и числеността на популацията остава

постоянна (и равна на равновесната стойност N^* , вж. (6.3)). По такъв начин стационарната стойност $N^* = p/\varepsilon_0$, вж. (6.3), играе ролята на *граница на оцеляване* на популацията, в смисъл че за да оцелее тя в едно хищно обкръжение, началната ѝ численост трябва да бъде не по-малка от N^* . С подобна граница на оцеляване вече се срещнахме в § 5.2, но появата ѝ там беше резултат от вътрешновидовата специфика. Тук тази граница е естествено следствие от присъствието на хищници.

Поведението на решенията (6.5) на модела (6.1) в зависимост от знака на $N_0\varepsilon_0 - p = 0$ е показано на фиг. 6.1.

Ще илюстрираме казаното със следния пример.

Пример 6.1. Броят N на комарите в дадена област се подчинява на закона на Малтус (3.2), като числеността им се удвоява всяка седмица. В началния момент $t = 0$ (1 юли) $N = N_0 = 200\,000$. Хищниците (птици, жаби и др.) изядат по 20 000 комара дневно. Определете броя $N = N(t)$ на комарите в тази област през лятото. В частност, колко ще бъдат те на 15 септември?

Решение. За единица време приемаме едно денонощие. Коэффициентът на прираст на комарите определяме с помощта на (3.6):

$$\varepsilon_0 = \frac{\ln 2}{T} \approx 0.693/7 \approx 0,099,$$

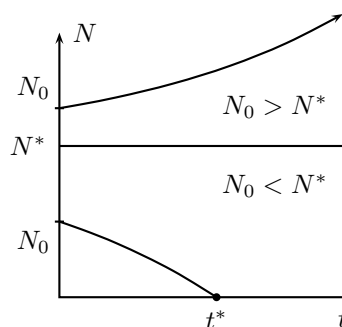
щом времето им за удвояване е една седмица. В случая $p = 20\,000$ (комари/денонощие) и следователно

$$N_0\varepsilon_0 - p = 200\,000 \cdot 0,099 - 20\,000$$

$$\approx 19\,804,25 - 20\,000 \approx -195,795.$$

Знакът „минус“ ни информира, че популацията на комарите е обречена — след определен интервал от време тя ще изчезне.

Броят на комарите през лятото (след 1 юли), т. е. функцията $N = N(t)$, ще намерим, като конкретизираме (6.5) с помощта на зададените



Фиг. 6.1

или вече намерените стойности на съответните параметри:

$$\begin{aligned} N(t) &= \left(N_0 - \frac{p}{\varepsilon_0}\right) e^{\varepsilon_0 t} + \frac{p}{\varepsilon_0} \\ &= -2020 e^{\varepsilon_0 t} + 202020 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$. Всичко това означава, че хищниците успешно (от своя и от наша гледна точка, разбира се) се борят с комарите в разглежданата област. Броят на последните намалява. Периодът, за който комарите изчезват напълно, ще определим с помощта на (6.7):

$$t^* = \frac{1}{\varepsilon_0} \ln \frac{p}{p - N_0 \varepsilon_0} \approx 46,52 \text{ денонощия,}$$

т. е. около средата на август. В частност, на 15 септември (76 дни след 1 юли) комари няма да има.

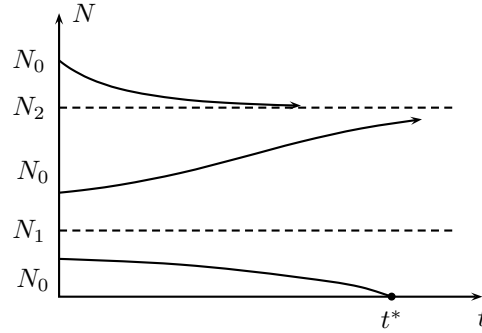
Ще завършим разглеждането на този пример с една забележка.

Макар че изчезването на комарите може да изглежда като благо за нас, то е трагедия за всички „хищни“ видове, за които те са основна храна. Това ще доведе до екологична катастрофа за тези видове — те ще изчезнат заедно с комарите. Но в опростения модел (6.1) не е отчетен един съществен ефект. Именно, намаляването на комарите ще доведе до намаляване и на броя на „хищниците“. На свой ред това ще увеличи броя на комарите и т. н. Подобни ефекти на по-сложно взаимодействие в екосистема „хищник – жертва“ се отчитат в класическия модел на Лотка-Волтера, който се описва вече със система от две диференциални уравнения (§ 8).

Упражнение 6.1. Коефициентът на смъртност на популация в даден район е μ . За единица време в областта влизат p нови екземпляра в резултат на миграция: а) запишете уравнението на модела; б) намерете стационарните състояния; в) изследвайте устойчивостта им; г) какъв е законът за изменението на числеността на популацията в района?

6.2. Лимитирана популация в обкръжение на хищници. Да разгледаме накратко и случая, когато ръстът на популацията е лимитиран, а хищниците унищожават p екземпляра от нея за единица време. Тази ситуация се описва от уравнението

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon_0 (1 - L(N)) N - p, \quad \varepsilon_0 > 0.$$



Фиг. 6.2

Предполагаме, че лимитирането $L(N)$ се описва съгласно Ферхулст, вж. (5.4). Това води до простия модел

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad (6.8)$$

$$F(N) = \varepsilon_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - p.$$

Очевидно

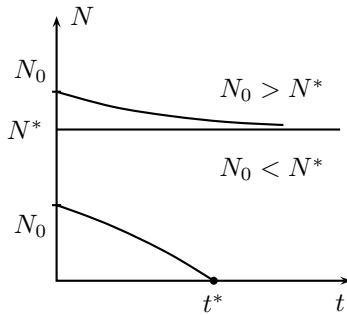
$$F(N) = f(N) - p, \quad (6.9)$$

където $f(N)$ е функцията в модела на Ферхулст (5.5). Следователно $F(N)$ графично се изобразява чрез параболата на Ферхулст, вж. фиг. 5.1, преместена вертикално надолу с p единици. Оттук е ясно, че моделът (6.8) има две стационарни решения N_1 и N_2 , като

$$0 < N_1 < \frac{1}{2}K < N_2 < K,$$

при условие че $\varepsilon_0 K/4 > p$. (Напомниме, че $\varepsilon_0 K/4$ е максималната стойност на функцията $f(N)$, вж. § 5.1 и фиг. 5.1.) Първото от тези решения е неустойчиво, а второто — устойчиво (тъй като $F'(N_1) > 0$, а $F'(N_2) < 0$, което е ясно от графиката на $F(N)$.) Ако началната численост $N_0 < N_1$, решението $N(t)$ намалява и след краен интервал от време t^* популацията изчезва. Ако $N_1 < N_0 < N_2$, решението $N(t)$ също намалява, но при $t \rightarrow \infty$ клони (отдолу) асимптотично към по-голямата от стационарните стойности N_2 . При $N_0 > N_2$ функцията $F(N)$ е отрицателна и тогава решението $N(t)$ намалява, като при $t \rightarrow \infty$ клони асимптотично (този път отгоре) към същата стационарна стойност N_2 . Всичко това е илюстрирано на фиг. 6.2.

Забележете, че и тук, както и в § 6.1, съществува граница на оцеляване на популацията — началният брой на индивидите или коефициентът им на прираст трябва да са достатъчно големи за да компенсират загубите от хищното обкръжение. В случая тази граница е N_1 — по-малката от двете стационарни стойности (т.е. по-малкият от корените на уравнението $F(N) = 0$).



Фиг. 6.3

При условие че $\varepsilon_0 K/4 = p$, стационарните решения съвпадат:

$$N_1 = N_2 = N^*, \quad N^* = \frac{1}{2}K,$$

така че уравнението $F(N) = 0$ има двоен корен. В този случай и $F'(N^*) = 0$, така че простият анализ на устойчивостта в първо приближение (§ 3.4) не носи никаква информация. Ясно е, че ако $N_0 > N^*$, то $F(N) < 0$ и решението клони отгоре към стационарната си стойност N^* . Ако обаче $N_0 < N^*$, то $F(N)$ е също отрицателно, решението намалява и

се анулира след краен период от време. Да отбележим, че стационарни решения от подобен тип се наричат *полуустойчиви*: от едната им страна ($N_0 > \bar{N}$) се наблюдава устойчивост, но от другата ($N_0 < N^*$) устойчивост няма. Всичко това е илюстрирано на фиг. 6.3.

Упражнение 6.2. Проверете, че в току-що разгледания случай $\varepsilon_0 K/4 = p$ решението на уравнението (6.8), при началното условие $N(0) = N_0$, има вида

$$\eta(t) = \frac{1}{2} + \frac{\eta_0 - \frac{1}{2}}{\eta_0 - \frac{1}{2}(2^t - 1) + 1}$$

спрямо безразмерните параметри (5.7).

И накрая, при $\varepsilon_0 K/4 < p$ стационарни стойности няма. Функцията $F(N)$ е отрицателна за всички N . Това означава, че независимо от началните условия числеността на популацията намалява с времето и изчезва след краен период.

6.3. Оптимизация на промишления риболов. Предполагаме, че числеността $N(t)$ на риба, която се лови в промишлени количества, се подчинява на модела на Ферхулст (5.5). Тук отново се сблъскваме с популация в обкръжение на хищници. В случая това са риболовните кораби.

Ясно е, че ако риболовът е много интензивен, популацията може да намалее драстично и да изчезне. Затова следва да се разработи оптимална риболовна стратегия, при която уловът да е максимално възможният, като в същото време рибният запас се поддържа на едно стабилно ниво без опасност от изчезване.

Да предположим, че скоростта на улов е пропорционална на броя на рибите: колкото повече са те, толкова по-лесно е да се уловят. С други думи, предполагаме, че тази скорост е EN , където E е положителна константа, характеризираща интензитета на риболова (например E е пропорционално на броя на едновременно използваните риболовни кораби). За да отчетем този улов, модифицираме логистичното уравнение (5.5) по очевиден начин:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= f(N), \\ f(N) &= \varepsilon_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Забележете, че константата E в този модел може да се интерпретира като коефициент на смъртност сред рибите, предизвикана от външни причини (интензивен риболов).

Записваме уравнението (6.10) във вида

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon \left(1 - \frac{N}{R}\right) N \tag{6.11}$$

и забелязваме, че то съвпада с уравнението (5.5) на модела на Ферхулст, но при нови стойности на параметрите на модела, а именно:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - E, \quad R = \left(1 - \frac{E}{\varepsilon_0}\right) K, \tag{6.12}$$

т. е. коефициентът на прираст вече не е ε_0 , а е намалял с E вследствие на риболова, вж. (6.11). Капацитетът на средата, вече R , е намалял по същата причина, $R < K$. От (6.12) следва впрочем, че риболовът като промишленост има смисъл само при естественото условие

$$E < \varepsilon_0, \tag{6.13}$$

т. е. $\varepsilon = \varepsilon_0 - E > 0$. В противен случай рибата ще изчезне след краен интервал от време.

Съвпадането на (6.11) с уравнението на Ферхулст (5.5) позволява да повторим всички разсъждения и изводи, направени в § 5.1 при разглеждането на (5.5). В частност, при условието (6.13) моделът (6.10) има единствено стационарно решение

$$N(t) \equiv N^*, \quad N^* = R = \left(1 - \frac{E}{\varepsilon_0}\right) K, \quad (6.14)$$

което е устойчиво. Това означава, че промишленият риболов в случая може да продължава произволно дълго, без да се изчерпи запасът от риба. (Рибната популация има възможност да се самовъзстановява щом е изпълнено неравенството (6.13).) Количеството риба, което ще се улови за единица време при стационарния режим, е

$$Y = Y(E) = EN^* = K \left(1 - \frac{E}{\varepsilon_0}\right) E. \quad (6.15)$$

Величината Y се нарича, по очевидни причини, *ефективност на риболова*. При фиксиран прираст ε_0 на рибния ресурс тя зависи само от интензитета E . Веднага възниква естественият въпрос: при какъв интензитет E ефективността на риболова е максимална.

Отговорът е прост: функцията $Y(E)$ е квадратична, вж. (6.15), и графиката ѝ е парабола, която е положителна в интервала $E \in (0, \varepsilon_0)$ и се анулира в двата му края. Максималната стойност на $Y(E)$ се достига в средата на този интервал, т. е. при $E = \varepsilon_0/2$, като

$$Y_{\max} = Y\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 K.$$

Следователно оптималната стратегия в промишления риболов е за единица време да се улови количество риба, равно на половината, $\varepsilon_0/2$, от коефициента на прираст на рибния ресурс. По-интензивен риболов може да доведе за кратко време до по-голям улов в началото, но това ще попречи рибата да се самовъзстановява до по-високи нива и скоро уловът ще намалее.

Упражнение 6.3. *Определете оптималния годишен улов на морска биомаса за района на Тихия океан от упражнение 5.1. Колко е нивото на насищане R при такъв улов?*

Отг.: $\approx 14,29 \cdot 10^6$ kg; $R = K/2 = 40,25 \cdot 10^6$ kg.

§ 7. Два вида, „борещи се“ за обща храна

7.1. Популационна динамика на няколко взаимодействащи си вида. Основното предположение (3.1) за скоростта на ръста на отделна популация се запазва и при разглеждането на няколко биологически вида:

$$dN_i = \varepsilon_i N_i dt, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(N_1, \dots, N_k), \quad (7.1)$$

$i = 1, \dots, k$. Функцията $\varepsilon_i = \varepsilon_i(N_1, \dots, N_k)$ представлява коефициента на прираст на вида ‘ i ’. Зависимостта на ε_i от числеността не само на вида ‘ i ’, но и от тази на всички останали, отразява спецификата на „взаимодействието“ между видовете.

Динамиката на разглежданата биологическа общност, като следствие от (7.1), се описва от автономната система диференциални уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= f_i(N_1, \dots, N_k), \\ f_i(N_1, \dots, N_k) &= \varepsilon_i(N_1, \dots, N_k)N_i, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Както и в случая на една популация, особен интерес за нас ще представляват *равновесните* (или *стационарни*) решения на системата (7.2)

$$N_i(t) \equiv N_i^*, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.3)$$

Ясно е, че $N_i^* = 0$, $i = 1, \dots, k$, са стационарни решения. Нетривиалните стационарни решения очевидно трябва да се търсят сред решенията на системата

$$\varepsilon_i(N_1^*, \dots, N_k^*) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.4)$$

Изследването на устойчивостта на стационарните решения (ако те въобще съществуват) може да се проведе в „първо приближение“ по схемата, разгледана в § 3.4 в едномерния случай ($k = 1$). Това ще доведе в крайна сметка до изследване на собствените стойности и собствените вектори на $(k \times k)$ -матрицата от частните производни

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial N_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

пресметнати при $N_j = N_j^*$. Подобно изследване в случая е по-трудоемко и е предмет на теорията на обикновените диференциални уравнения, вж. например [4, 17]. Тук то няма да се обсъжда. В частния случай на системата „хищник-жертва“ на Лотка-Волтера устойчивостта на съответното

стационарно решение ще бъде установена с помощта на геометрични разсъждения (§ 8.3). Нека споменем само, че спецификата на поведението на решенията на системата (7.2) в околността на стационарните точки е много по-богата от случая $k = 1$, разгледан в § 3.4.

Ако моделът (7.2) има стационарни точки и те се окажат устойчиви, това означава, че за моделираната система съществува екологично равновесие. Флуктуациите в числеността на всеки един от видовете остават ограничени във времето и се компенсират от флуктуации в числеността на останалите видове. Класически пример, илюстриращ това, е отново системата на Лотка-Волтера (§ 8).

Ако моделът (7.2) няма нетривиални стационарни точки или ако притежава такива, но те са неустойчиви, то екологично равновесие в моделираната система е невъзможно. Числеността на един или няколко от видовете ще клони към нула при $t \rightarrow \infty$, което говори за изчезването им. След това изчезване останалите видове ще потърсят на свой ред устойчиви (също ненулеви) стационарни стойности и т. н., докато сред оцелелите не се установи екологичен баланс.

7.2. Два вида, „борещи се“ за обща храна — изчезване на „по-лакомия“ вид. Ще започнем с най-простия случай на два вида, „борещи се“ за обща храна. Въвеждаме функцията $F = F(N_1, N_2)$. Това е количеството храна, изяждана съвместно от двата вида за единица време (N_1 и N_2 са техните числености).

Основното уравнение на модела е

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2))N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= (\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2))N_2,\end{aligned}\tag{7.5}$$

$\varepsilon_i, \gamma_i \geq 0$. Тук ε_i са коефициентите на прираст на двата вида, ако те не си взаимодействат; коефициентите γ_i отразяват потребността от общата храна — колкото по-голямо е γ_i , толкова „по-лаком“ е видът ‘ i ’, $i = 1, 2$.

Тривиалното решение $N_1 = N_2 = 0$ е стационарна точка на модела (7.5). Нетривиална стационарна точка съществува очевидно само ако е изпълнено условието

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}.\tag{7.6}$$

Ако то не е изпълнено, екологичното равновесие е невъзможно и един от двата вида неминуемо ще изчезне.

За да се убедим в това, записваме (7.5) във вида

$$\begin{aligned}\frac{d \ln N_1}{dt} &= \varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2), \\ \frac{d \ln N_2}{dt} &= \varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2),\end{aligned}$$

и изключваме $F(N_1, N_2)$ от двете последни уравнения. Резултатът е

$$\gamma_2 \frac{d \ln N_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d \ln N_2}{dt} = \gamma_2 \varepsilon_1 - \gamma_1 \varepsilon_2$$

или

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = C e^{\chi t}, \quad C = \frac{(N_1^0)^{\gamma_2}}{(N_2^0)^{\gamma_1}}, \quad (7.7)$$

$$\chi = \gamma_2 \varepsilon_1 - \gamma_1 \varepsilon_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \right). \quad (7.8)$$

Тук N_i^0 е началната численост на вида ‘ i ’ при $t = 0$, $i = 1, 2$.

Съотношението (7.7) показва, че параметърът χ определя „съдбата“ на отделните видове в следния смисъл:

1) Ако $\chi > 0$, то

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} \rightarrow \infty$$

при $t \rightarrow \infty$, т. е. $N_2 \rightarrow 0$, и вторият вид изчезва, тъй като N_1 трябва да остава крайно.

2) Ако $\chi < 0$, то

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, т. е. $N_1 \rightarrow 0$, и първият вид изчезва, тъй като N_2 трябва да остава крайно.

Отгук веднага се вижда, че при един и същ коефициент на прираст $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ изчезва „по-лакомият“ вид, т. е. този, за който коефициентът γ е по-голям.

В случаите, разгледани по-горе, параметърът $\chi \neq 0$, т. е. условието (7.6) не е изпълнено, вж. също (7.8). Отгук следва, че системата (7.5) няма стационарни решения и поради това екологичен баланс между двата вида е невъзможен: единият от тях неминуемо изчезва, както вече отбелязахме в § 7.1.

3) Нека $\chi = 0$. В този случай условието (7.6) е изпълнено и затова (7.7) представлява интеграл на системата (7.5):

$$N_1^{\gamma_2} = CN_2^{\gamma_1}, \quad \text{т. е. } N_1 = (CN_2^{\gamma_1})^{1/\gamma_2}. \quad (7.9)$$

Стационарните стойности се определят от съотношението

$$F(N_1^*, N_2^*) = 0,$$

което, заедно с интеграла (7.9), води до уравнението

$$F\left((CN_2^{*\gamma_1})^{1/\gamma_2}, N_2^*\right) = 0 \quad (7.10)$$

спрямо неизвестното N_2^* . Ако последното уравнение има физически смислено решение N_2^* , то N_1^* се определя чрез него, като приложим (7.9).

Да се върнем към случая $\chi \neq 0$, когато единият вид изчезва (да речем вторият, $N_2 = 0$). След изчезването⁶ му числеността $N_1 = N_1(t)$ на популацията на вида '1' се подчинява на уравнението

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 (1 - L(N_1)) N_1, \quad (7.11)$$

където

$$L(N_1) = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} F(N_1, 0) \quad (7.12)$$

е монотонно нарастваща функция. (Защо монотонна? Защото повече индивиди изяждат повече храна.) Очевидно (7.11) съответства на лимитиран модел на изолираната популация '1', разгледан в § 5.1. Следователно всички разсъждения и заключения от § 5.1 са в сила и тук за оцелялата популация. В частност, тя ще се намира в екологично равновесие с окръжаващата среда, като числеността ѝ ще флукутира около стационарната стойност N_1^* . Тази стойност е единственият корен на уравнението $L(N_1^*) = 1$, вж. (5.3).

⁶Строго погледнато, видът никога не изчезва, защото отношението $N_1^{\gamma_2}/N_2^{\gamma_1}$ клони към 0 или ∞ при $t \rightarrow \infty$. На практика обаче съответната популация ще изчезне за крайно време: достатъчно е например N_1 или N_2 да стане по-малко от 1.

§ 8. Най-прост модел „хищник-жертва“ — уравнения на Лотка-Волтера

8.1. Уравнения на Лотка-Волтера. В този класически модел на популационната динамика се разглежда биологическа съобщност, в която си взаимодействат два вида — „жертви“ (вид ‘1’) и „хищници“ (вид ‘2’). Коэффициентът на прираст на „жертвите“, при отсъствие на „хищници“, е $\varepsilon_1 > 0$. Коэффициентът на прираст на „хищниците“ е $-\varepsilon_2 < 0$ (при липса на „жертви“, „хищниците“ намаляват поради недостиг на храна).

При „взаимодействието“ на двата вида коэффициентите на прираст са:

$$\begin{aligned} \text{вид 1 : } & \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \\ \text{вид 2 : } & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Интерпретацията на предположенията (8.1) е проста: коэффициентът на прираст на „жертвите“ е толкова по-малък, колкото повече са „хищниците“. Аналогично, коэффициентът на прираст на „хищниците“ е толкова по-голям, колкото повече храна, т. е. „жертви“, има наоколо.

Предположението (8.1), което изглежда съвсем разумно и реалистично (поне от качествена гледна точка), води до системата

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) N_2, \end{aligned} \quad (8.2)$$

вж. (7.1), известна като *система на Лотка-Волтера*. Тя описва математически най-простия възможен модел от типа „хищник-жертва“.

Нетривиалното стационарно решение на системата (8.2) е

$$\begin{aligned} N_1^* &\equiv K_1, & N_2^* &\equiv K_2, \\ K_1 &= \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, & K_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Това са „равновесните“ стойности на двете популации, определени от анулирането на десните страни на (8.2).

8.2. Първи интеграл на системата на Лотка-Волтера. Като използваме автономността на системата (8.2), изключваме времето t ,

разделяйки двете ѝ уравнения. Последователно намираме

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1}{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2},$$

$$\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1\right) \frac{dN_1}{N_1} = \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2\right) \frac{dN_2}{N_2},$$

$$\varepsilon_1 \frac{dN_2}{N_2} - \gamma_1 dN_2 + \varepsilon_2 \frac{dN_1}{N_1} - \gamma_2 dN_1 = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon_1 \ln N_2 - \gamma_1 N_2 + \varepsilon_2 \ln N_1 - \gamma_2 N_1 = C. \quad (8.4)$$

Съотношението (8.4) представлява *първи интеграл* на системата (8.2). Константата C се определя от началните условия

$$N_1 = N_1^0, \quad N_2 = N_2^0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (8.5)$$

8.3. Закон за периодичността на популациите. Разглеждаме фазовата равнина \mathcal{F} на системата (8.2). Състоянието ѝ във всеки момент от време се характеризира с точката $M = (N_1, N_2) \in \mathcal{F}$, а изменението на състоянието очертава определена траектория в тази равнина, фиг. 8.1 а). Стационарното състояние (8.3) се изобразява като точката $\Omega = \Omega(K_1, K_2) \in \mathcal{F}$. Съотношението (8.4) показва, че тези траектории представляват семейство от затворени и изпъкнали криви във фазовата равнина (N_1, N_2) , вж. [4, стр. 309] за по-подробен анализ. Целта ни сега е да покажем, че точката $M = (N_1, N_2)$ ще се движи по фазовата си траектория в една и съща посока и поради това, след определено време T , ще се върне в изходното си положение. Това означава, че решенията на системата (8.2) са периодични функции.

За да се убедим в това, въвеждаме, следвайки Волтера [44, 45], полярни координати (ρ, φ) в равнината \mathcal{F} с център в полюса Ω , вж. фиг. 8.1 а). Нека

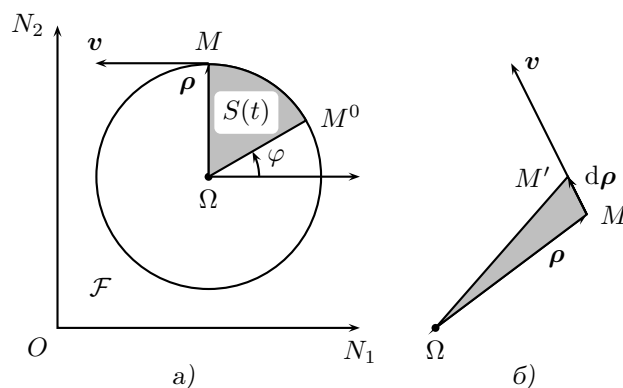
$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{\Omega M}, \quad \rho_1 = N_1 - K_1 = \rho \cos \varphi,$$

$$\rho_2 = N_2 - K_2 = \rho \sin \varphi. \quad (8.6)$$

Скоростта на движението на точката по фазовата траектория е

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}, \quad v_1 = \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{dN_1}{dt},$$

$$v_2 = \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{dN_2}{dt}. \quad (8.7)$$



Фиг. 8.1. а) Фазовата равнина \mathcal{F} на системата (8.2); б) Илюстрация на понятието площна скорост и на извода на формулите (8.9) и (8.12)

Разглеждаме площта $S(t)$, „изметена“ от радиус-вектора ρ на точката M при движението ѝ по съответната фазова траектория в равнината \mathcal{F} , вж. фиг. 8.1 а), където M^0 отговаря на началното състояние (8.5) при $t = 0$. Въвеждаме *плочната* или *секторна скорост*

$$\sigma = \frac{dS}{dt}. \quad (8.8)$$

Ще покажем, че

$$\sigma = \frac{1}{2} |\rho \times \mathbf{v}|. \quad (8.9)$$

Наистина

$$\frac{1}{2} |\rho \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2} \left| \rho \times \frac{d\rho}{dt} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\rho \times d\rho|}{dt},$$

вж. (8.7). Но $|\rho \times d\rho|$, съгласно дефиницията на векторното произведение, е ориентираното лице на успоредника със страни ρ и $d\rho$. Следователно $\rho \times d\rho = 2dS$, където dS е половината от лицето на този успоредник, т. е. лицето на триъгълника $\Omega M M'$, вж. фиг. 8.1 б). Оттук веднага следва формулата (8.9).

Да се върнем към системата на Лотка-Волтера (8.2). Векторите ρ и \mathbf{v} тук са компланарни — лежат в равнината \mathcal{F} — и затова

$$|\rho \times \mathbf{v}| = \rho_1 v_2 - \rho_2 v_1.$$

С помощта на (8.6), (8.7) и (8.9) отгук намираме

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2} \left[(N_1 - K_1) \frac{dN_2}{dt} - (N_2 - K_2) \frac{dN_1}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\gamma_2 N_2 (N_1 - K_1)^2 + \gamma_1 N_1 (N_2 - K_2)^2 \right] > 0,\end{aligned}\tag{8.10}$$

вж. (8.2). Това означава, че площната скорост на точката M спрямо полюса Ω е винаги положителна, т. е. радиус-векторът ρ се върти в една и съща посока. Тръгвайки от дадена начална точка $M^0 = (N_1^0, N_2^0)$, той неминуемо, след определено време T , ще се върне в същата точка M^0 , тъй като траекториите (8.4), както вече отбелязахме, представляват затворени криви във фазовата равнина (N_1, N_2) . Следователно решенията на системата на Лотка-Волтера (8.2) наистина са *периодични функции*. (Стига началните условия да са достатъчно близки до стационарното състояние Ω , за да се избегне „блъскане“ на фазовата траектория в някоя от координатните оси⁷.)

Пример 8.1. За илюстрация да разгледаме системата (8.2) при конкретни (произволно подбрани!) стойности на съответните параметри:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (0,3 - 0,02N_2)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -(0,2 - 0,01N_1)N_2,\end{aligned}$$

при началните условия

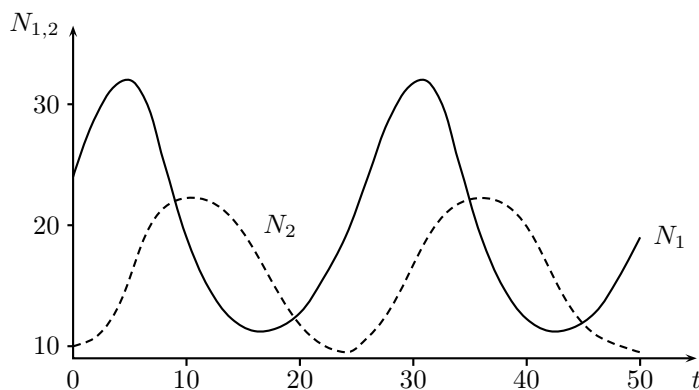
$$N_1^0 = 25, \quad N_2^0 = 10$$

(20 жертви и 15 хищника).

Стойностите на тези параметри са, разбира се, нереалистични, но численото решение достатъчно добре илюстрира периодичността на решението на системата на Лотка-Волтера. Това решение, заедно със съответната фазова траектория, е показано съответно на фиг. 8.2 и фиг. 8.3. Стационарното решение в случая е

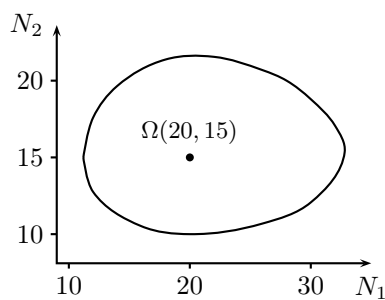
$$N_1^* = 20, \quad N_2^* = 15.$$

⁷Ако броят на хищниците е много голям, то те ще ликвидират бързо популацията на жертвите (последните няма да имат възможност да се възпроизведат). Геометрически това ще означава, че фазовата траектория ще пресече оста $N_1 = 0$ или, образно казано, ще се „блъсне“ в нея. След изчезването на жертвите, хищниците ще започнат да намаляват поради липса на храна. Съответно фазовата траектория ще остане върху оста $N_1 = 0$ и ще се устреми към началото $(0,0)$. Тя ще попадне там в момента, в който и последният хищник умре от глад.



Фиг. 8.2

Геометрически то съответства на точката Ω на фиг. 8.3.



Фиг. 8.3

8.4. Забележка относно площната скорост. Понятието площна скорост се появява за пръв път в небесната механика и по-точно в един от законите на Кеплер, който гласи, че *всяка планета се движи по своята орбита около Слънцето с постоянна площна скорост*. Този закон е следствие от факта, че силата \mathbf{F} , причиняваща движението на планетата, е винаги насочена към Слънцето, т. е. тя е колинеарна на радиус-вектора \mathbf{r} , $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ (предполагайки, че Слънцето е неподвижна материална точка, съвпадаща с полюса). Сили, за които $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$, се наричат *централни*. Лесно е да се види, че в поле на централни сили площната скорост на точка винаги се запазва (това е т. нар. *интеграл на площите* в динамиката на материална точка).

Наистина, да запишем втория закон на Нютон и да умножим векторно двете му страни с радиус-вектора \mathbf{r} :

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (8.11)$$

Но $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и подчертаният член в (8.11) се анулира. Анулира се и дясната страна на (8.11), щом $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$. Следователно

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{C},$$

където \mathbf{C} е постоянен вектор. Оттук се вижда, че движението на точката е равнинно (в равнина, перпендикулярна на вектора \mathbf{C}) и се осъществява с постоянна площна скорост

$$\sigma = \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}|,$$

вж. (8.9).

8.5. Пресмятане на периода T . Нека за време dt полярният ъгъл на точката M се изменя с $d\varphi$ (това е ъгълът при върха Ω на „безкрайно-тънкия“ триъгълник $\triangle\Omega MM'$, вж. фиг. 8.1 б). Основата MM' на този триъгълник, с точност до безкрайно-малки от по-висок ред спрямо $d\varphi$, е $\rho d\varphi$, т. е. лицето на $\triangle\Omega MM'$ е $dS = \frac{1}{2}\rho \cdot (\rho d\varphi)$. Следователно

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\varphi}. \quad (8.12)$$

Това е формулата за площната скорост в полярни координати.

Да заместим в (8.12) израза за площната скорост (8.10) на точката M :

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \gamma_2 N_2 \rho^2 \cos^2 \varphi + \gamma_1 N_1 \rho^2 \sin^2 \varphi, \quad (8.13)$$

вж. (8.6). Но

$$N_1 = K_1 + \rho \cos \varphi, \quad N_2 = K_2 + \rho \sin \varphi,$$

вж. отново (8.6). С помощта на (8.13) сега намираме

$$\frac{d\varphi}{dt} = \gamma_2 (K_2 + \rho \sin \varphi) \cos^2 \varphi + \gamma_1 (K_1 + \rho \cos \varphi) \sin^2 \varphi.$$

Оттук

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\gamma_1 K_1 \sin^2 \varphi + \gamma_2 K_2 \cos^2 \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi (\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi)},$$

което ни позволява да намерим израза за периода T (интервала от време T , за което $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$):

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\gamma_1 K_1 \sin^2 \varphi + \gamma_2 K_2 \cos^2 \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi (\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi)}.$$

При малки отклонения от стационарното състояние Ω , ρ е малко в сравнение с K_1 и K_2 и може да се пренебрегне. Вторият член на знаменателя на подинтегралния израз в последната формула тогава се пренебрегва:

$$T \approx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\gamma_1 K_1 \sin^2 \varphi + \gamma_2 K_2 \cos^2 \varphi}. \quad (8.14)$$

Пресмятането на този интеграл е елементарно (вж. по-долу) и окончателният резултат е

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}. \quad (8.15)$$

Следователно малките колебания на числеността на видовете около стационарното състояние са *изохронни*, т. е. не зависят от началното състояние (аналогично на малките колебания на математическото махало, вж. § 2.6, пример 2.3), а периодът им се определя *единствено* от коефициентите на прираст ε_1 и ε_2 на двете популации.

Пресмятането на интеграла (8.14) е както следва:

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{K_1 \gamma_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (\kappa^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} \\ &= \frac{4}{K_1 \gamma_1} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + \kappa^2} = \frac{4}{K_1 \gamma_1} \left[\frac{1}{\kappa} \operatorname{arctg} \frac{u}{\kappa} \right] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{K_1 K_2 \gamma_1 \gamma_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}, \quad \kappa^2 = \frac{K_2 \gamma_2}{K_1 \gamma_1}. \end{aligned}$$

Тук е направена субституцията $u = \operatorname{tg} \varphi$ и е използвана формулата (8.3) за K_1 и K_2 .

8.6. Запазване на средните стойности. Записваме системата на Лотка-Волтера (8.2) във вида

$$\begin{aligned}\frac{d \ln N_1}{dt} &= \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \\ \frac{d \ln N_2}{dt} &= -\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1.\end{aligned}\tag{8.16}$$

За произволен начален момент t' интегрираме (8.16) в интервала $(t', t' + T)$, т. е. за един период:

$$\begin{aligned}\int_{t'}^{t'+T} d \ln N_1 &= \varepsilon_1 T - \gamma_1 \int_{t'}^{t'+T} N_2(t) dt, \\ \int_{t'}^{t'+T} d \ln N_2 &= -\varepsilon_2 T + \gamma_2 \int_{t'}^{t'+T} N_1(t) dt.\end{aligned}$$

Интегралите в левите страни се анулират поради периодичността на функциите $N_1(t)$ и $N_2(t)$ (щом интегралът е върху един период). Следователно за средните стойности на тези функции (означени с черта над съответния символ) получаваме

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} N_1(t) dt = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K_1, \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} N_2(t) dt = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = K_2.\end{aligned}\tag{8.17}$$

Формулата (8.17) изразява закона за запазване на средните стойности: макар и броят на индивидите да варира около стационарните стойности K_1 и K_2 , средният им брой за един период е винаги равен на тези стационарни стойности.

Пример 8.2. Нека усложним модела на Лотка-Волтера, като предположим, че „жертвите“ се борят и помежду си за общата храна.

В този случай в коефициента на прираста за вида ‘1’ се появява и допълнителният член $-\delta_1 N_1$ и системата (8.2) се усложнява:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \delta_1 N_1) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) N_2.\end{aligned}\tag{8.18}$$

Численият анализ на системата (8.18) показва, че решенията се „навиват“ спираловидно, стремейки се към стационарната точка на тази система във фазовата равнина.

Упражнение 8.1. Кое е стационарното решение на системата (8.18)?

Упражнение 8.2. Опитайте се да анализирате числено системата (8.18), като използвате методи за решаване на обикновени диференциални уравнения или пък с помощта на някой от известните пакети приложни програми (Matlab, Mathematica и пр.).

8.7. Ефекти на „наследственост“ в модела на Лотка-Волтера. Нека dN_ξ е броят на хищниците, чиято възраст в даден момент t е в интервала $(\xi, \xi + d\xi)$. Тогава

$$\frac{dN_\xi}{N_2(t)} = \varphi(\xi) d\xi. \quad (8.19)$$

Ако N_θ е броят на хищниците, чиято възраст е по-голяма от θ , то

$$\frac{N_\theta}{N_2(t)} = \int_\theta^\infty \varphi(\xi) d\xi = f(\theta). \quad (8.20)$$

Функциите на разпределение $\varphi(\xi)$ и $f(\theta)$ характеризират „възрастовата структура“ на популацията ‘2’.

Броят на хищниците, съществували не само в момента t , но и в момента τ ($\tau < t$), е $f(t - \tau)N_2(t)$ (ако индивидът е съществувал в момента τ , то за да съществува и в бъдещия момент t , възрастта му трябва да е по-голяма от $t - \tau$).

Хищниците в момента τ ще изядат храна, пропорционална на броя им и на броя на жертвите в същия момент τ . Следователно

$$\begin{aligned} & \text{храната, изядена в интервала } (\tau, \tau + d\tau), \\ & \sim \{ f(t - \tau)N_2(t) \} N_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Коефициентът на прираст в момент t , обусловен от храната, изядена в миналото, вж. (8.21), е пропорционален на нейното количество:

$$\psi(t - \tau) \{ f(t - \tau)N_2(t) \} N_1(\tau) d\tau. \quad (8.22)$$

Тук $\psi(t - \tau)$ е коефициент на пропорционалност, зависещ от „дистанцията“ във времето $t - \tau$ между разглежданите моменти τ и t . Естествено е да се предположи, че той „затихва“, т. е. $\psi(t - \tau) \rightarrow 0$ при $t - \tau \rightarrow \infty$.

Коефициентът на прираст в момент t , в резултат на храната, изядена във всички минали моменти $\tau \in (-\infty, t)$, ще намерим като „просумираме“ изразите (8.22), т. е. като проинтегрираме (8.22) от $-\infty$ до t :

$$N_2(t) \int_{-\infty}^t K(t - \tau) N_1(\tau) d\tau, \quad K(t - \tau) = f(t - \tau) \psi(t - \tau).$$

Следователно второто уравнение на системата (8.2) се модифицира:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= - \left[\varepsilon_2 - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) N_1(\tau) d\tau \right] N_2(t).\end{aligned}\tag{8.23}$$

Забележете, че моделът (8.23) не се описва вече с помощта на обикновени диференциални уравнения както досега. В дясната страна на (8.23) се появява и интеграл, включващ една от неизвестните функции. Уравнения от такъв тип се наричат най-общо *интегро-диференциални*. Нещо повече, интегралният член тук представлява често срещания в приложенията *интегрален оператор на Волтера*. Този оператор съпоставя на дадена функция $f(t)$ функцията

$$g(t) = \mathcal{K}[f](t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, \infty).\tag{8.24}$$

Обърнете внимание на квадратната скоба в означението $\mathcal{K}[f]$. Тя именно показва, че \mathcal{K} е *оператор* (т. е. преобразование) в пространството от функции, дефинирани в случая върху цялата реална права.

Да подчертаем също, че моделът (8.23) е от *наследствен тип*. Това означава, че скоростта на изменение на един или няколко от параметрите на състояние на системата (в случая \dot{N}_2) в даден момент от време t зависи не само от стойностите на тези параметри в същия момент, но и от цялата *предистория*, т. е. от *всички* стойности на тези параметри в предхождащите моменти от време τ , $\tau \in (-\infty, t)$. (В разглеждания случай е съществена само предисторията на броя на жертвите $N_1(t)$, вж. (8.23).) Поради тази причина модели от типа на (8.23) се наричат *наследствени* или още *модели с памет* (доколкото влиянието на предисторията върху скоростта на изменението на текущото състояние може да се интерпретира като проява на „памет“ от страна на модела). Съответно интегралният оператор на Волтера (8.24) се нарича също и *наследствен*.

С ефектите на наследственост ще се срещнем и по-нататък в този курс при моделиране на поведението на деформируемите твърди тела (§ 19). Там ще се убедим, че поведението на т. нар. вискозоеластични материали (каквито са например много от полимерите) се описва отново с помощта на интегралните оператори на Волтера (8.24).

Глава 3

СТАТИКА

След елементарните модели, изложени в предишната глава, ще преминем, бавно и полека, към основите на класическите модели на математическата физика. Тези модели касаят законите на деформирането на телата и тяхната топлопроводност. Теорията на топлопроводността ще разгледаме по-късно (глава 5), тъй като тя изисква въвеждането на апарата на векторния анализ и, в частност, на набла-смятането на Хамилтън. Затова ще започнем с формулиране и най-прост анализ на законите, описващи деформируемостта на телата под действие на приложените към тях сили. Това ще бъде предметът на следващата глава 4. Но преди да сме в състояние да формулираме тези закони, се налага предварително да изучим по-простия идеализиран случай на абсолютно твърдо тяло и ефекта върху неговото механично състояние, причинен от система сили.

Да поясним. Класическият модел на Нютон, споменат в § 1.3, разглежда движението на материална точка под действието на приложена към нея сила. Следващият по сложност и по важност въпрос в историята на точното естествознание и на механиката е моделирането на движението на тяло, чиито размери са крайни и не могат да се пренебрегнат. И тук първият и най-прост случай е този на *абсолютно твърдо тяло* — материален обем, който се движи така, че разстоянието между всеки две негови точки остава *неизменно*. Уравненията на движението на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка са изведени от Ойлер. В класическия извод на Ойлер, който може да се намери във всеки учебник по аналитична механика, се съдържат основни идеи, на чиято база Навие и Коши изграждат в началото на 19-ти век основите на съвременната механика на деформируемите (непрекъснатите) среди.

Формално погледнато, най-простият случай на движение на едно тяло е *покоят*, т.е. равновесното състояние на тялото. Науката, която се занимава с равновесието на изучаваните от нея обекти, се нарича *статика*. Например, ако се интересуваме от равновесието на течности, говорим за *хидростатика*, ако обектите са електрически заряди, то го-

ворим за *електростатика* и т. н. Най-проста и най-древна е класическата статика¹ — науката за равновесието на абсолютно твърдите тела под действието на приложените към тях сили. Тя се разделя на елементарна (геометрична) и аналитична².

В тази глава ще изложим кратко основите на елементарната статика от гледна точка на основните идеи на математическото моделиране, описани в § 1. Изложението като цяло се базира на класическото съчинение на Поансо [34], вж. също [3, том 1].

§ 9. Определения и аксиоми на статиката

9.1. Основни задачи на статиката. В елементарната статика се разглеждат системи от сили

$$(\mathcal{S}) = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n), \quad (9.1)$$

приложени в съответните точки A_1, \dots, A_n на абсолютно твърдо тяло. Подреждането на силите в системата (9.1) е несъществено, стига да не се менят приложените им точки. Множеството от всички системи сили от вида (9.1) означаваме с \mathcal{F} .

Интуитивно е ясно, че силата има приложна точка, големина и посока. От това обаче *не следва*, че тя представлява вектор. За да бъде силата вектор, е необходимо, в частност, силите да се събират по векторния закон, т. е. по правилото на успоредника (или, за повече от две сили, по правилото на многоъгълника). Но подобно твърдение представлява една от основните аксиоми на механиката, вж. аксиома 9.1 (§ 9.2).

Разглеждането на силите като вектори позволява, както ще видим по-нататък, да се прилагат систематично геометрични методи. Това обяснява защо елементарната статика се нарича също и геометрична. Подчертаваме веднага, че силата *не е свободен вектор*, т. е. че нямаме право да меним произволно приложната ѝ точка. Този факт именно поражда трудностите в елементарната статика. Тяхното преодоляване, макар и не сложно, е поучително и приятно.

Условията за равновесие на системи сили имат вида

$$f_\alpha(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (9.2)$$

¹Основните ѝ закони са установени още от Архимед.

²В основата на аналитичната статика е важният принцип на Лагранж (или на Бернули-Лагранж) на виртуалните премествания, който се разглежда подробно в аналитичната механика, вж. например [3, 6].

като функциите f_α и броят им k ще бъдат конкретизирани в § 12.4. По очевиден начин тези условия попадат в общата схема на статичните модели, описани в § 1. В случая силите $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ са параметрите на състоянието и (9.2) е всъщност една конкретизация на общото съотношение (1.3) на статичен модел при възприетата интерпретация на силите като параметри на равновесното състояние.

Системите от сили, приложени към тяло, могат да бъдат изключително сложни. Поради това директното търсене на условията за равновесие (9.2) само по себе си е безнадеждна задача. Нейното решаване изисква първо отговора на един по-общ въпрос, именно, към каква възможно най-проста еквивалентна система може да се редуцира произволна система от сили. Отговорът на този въпрос се дава в § 12.2, където се показва, че всяка система от сили се свежда към сила и двойца, като двойцата е система, образувана от две равни, успоредни и срещуположно насочени сили. На базата на този отговор конкретизирането на условията за равновесие (9.2) се оказва вече съвсем просто.

Въз основа на казаното дотук можем да формулираме *двете основни задачи* на геометричната статика по следния начин:

1. *Свеждане (редукция) на произволна система сили към възможно най-проста еквивалентна система;*
2. *Намиране на условията за равновесие на тяло под действието на произволна система сили.*

За да достигнем до общото решение на първата задача, е необходимо преди всичко да формулираме няколко естествени дефиниции и аксиоми, които ще ни позволят да оперираме с разглежданите системи от сили.

9.2. Свободно тяло. Да разгледаме първо случая на *свободно тяло*, т. е. на тяло, върху чието движение не се налагат никакви ограничения. Образно казано, тялото е свободно да се движи както и където иска из пространството.

Нека

$$(\mathcal{S}') = (\mathbf{F}'_1, \dots, \mathbf{F}'_{n'}) \quad \text{и} \quad (\mathcal{S}'') = (\mathbf{F}''_1, \dots, \mathbf{F}''_{n''}) \quad (9.3)$$

са две системи от сили, приложени към свободно абсолютно твърдо тяло. Тъй като в механиката се интересуваме само от движението и, в частност, от покоя на тялото под действието на приложените сили, то

разглежданите системи ни интересуват не сами по себе си, а само с оглед на движението, което причиняват. Поради това въвеждаме следната

Дефиниция 9.1. Системите сили (S') и (S'') са еквивалентни, ако те причиняват едно и също движение на тяло, към което са приложени, ако то първоначално е в покой. В този случай записваме

$$(S') \sim (S''). \quad (9.4)$$

Да отбележим, че внимателният читател, във връзка с последната дефиниция, би попитал веднага „а кое тяло?“. Да поясним. Нека системите (S') и (S'') причиняват едно и също движение на едно конкретно тяло, което е в покой. Откъде следва обаче, че те причиняват едно и също движение на друго тяло, което първоначално също е в покой. В рамките на статиката откровеният отговор е „от никъде не следва“. Едва в рамките на динамиката, с привличането на втория закон на Нютон и ойлеровите динамични аксиоми, може да се покаже, че изборът на конкретното тяло в дефиниция 9.1 е несъществен. С други думи, ако $(S') \sim (S'')$ за едно тяло, то еквивалентността на системите, в смисъла на същата дефиниция, е в сила и за произволно друго тяло.

Най-простата нетривиална система сили очевидно е тази, съставена от единствена сила F .

Дефиниция 9.2. Ако $(S) \sim F$, то F се нарича равнодействаща на системата (S) .

Следващата аксиома въвежда система, която има равнодействаща.

Аксиома 9.1. Ако силите F_i на системата (S) са приложени в една и съща точка O , то (S) има равнодействаща

$$F = \sum_{i=1}^n F_i,$$

която е векторната сума на силите F_1, \dots, F_n и при това е приложена в същата точка O .

С тази аксиома се постулира, по същество, правилото на успоредника (респективно, на многоъгълника) за събиране на сили, приложени в една точка, а чрез него и твърдението, че силата е вектор.

Дефиниция 9.3. Ако всички сили в системата (S) са нулеви, $F_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, то системата се нарича нулева и се означава с (0) .

Дефиниция 9.4. Системата (S) е в равновесие (или е равновесна), ако $(S) \sim (0)$, т. е. ако (S) е еквивалентна на нулевата система.

Нулевата система, приложена към тяло в покой, очевидно не може да причини движение. Съгласно дефиниция 9.1 това означава, че равновесната система притежава същото свойство: приложена към тяло в покой, тя оставя тялото в покой.

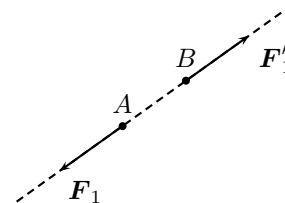
Дефиниция 9.5. Ако силите, действащи върху тяло, образуват равновесна система, то казваме, че и самото тяло е в равновесие.

По този начин термините равновесие на тяло и равновесие на система сили, приложени към него, са синоними. Кой от тях ще използваме по-нататък зависи единствено от конкретния контекст на разглежданите задачи.

Следващата аксиома въвежда интуитивно ясен пример за най-простата равновесна система.

Аксиома 9.2. Система $(S) = (F_1, F'_1)$, съставена от две сили, е в равновесие тогава и само тогава, когато силите F_1 и F'_1 са равни по големина, противоположно насочени и имат обща директриса, вж. фиг. 9.1.

Да напомним за пълнота, че директрисата на вектор е правата, върху която той лежи, т. е. правата, определена от началната и крайната точка на вектора.



Фиг. 9.1

Дефиниция 9.6. Ако $(S'), (S'') \in \mathcal{F}$ са две системи от сили, то сумата им е системата, образувана от силите и на едното, и на другото „събираемо“:

$$(S') + (S'') \stackrel{\text{def}}{=} (F'_1, \dots, F'_{n'}, F''_1, \dots, F''_{n''}). \quad (9.5)$$

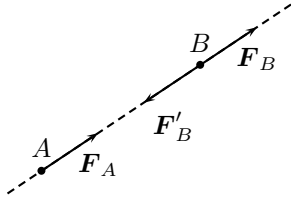
В този случай казваме, че към едната система, например (S') , е добавена другата система (S'') .

Аксиома 9.3. Ако към система сили се добави или премахне система, еквивалентна на нула, се получава система, еквивалентна на изходната.

Да поясним за всеки случай, че при споменатото в тази аксиома премахване просто изключваме еквивалентната на нула подсистема $(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ от дадената система (S) .

Както ще видим, аксиома 9.3 играе централна роля в изграждането на геометричната статика. Основната идея при нейното използване е следната. Към дадена система (S) добавяме подходящо избрана система

$(T) \sim 0$. Силите в така получената нова система $(S) + (T)$ групираме по подходящ начин, като премахваме подсистеми, еквивалентни на нула. В резултат достигаем до една по-проста система, еквивалентна на изходната (S) .



Фиг. 9.2

Ще илюстрираме веднага тази идея с доказателството на следната важна лема.

Лема 9.1. Силата, приложена към абсолютно твърдо тяло, е хлъзгащ вектор (или стрела).

Това означава, че действието на силата върху тяло остава неизменно, ако я „хлъзнем“ по произволен начин по директрисата ѝ.

Доказателство. Нека в точката A е приложена силата F_A . Фиксираме произволна точка B върху нейната директриса. В точката B прилагаме две равни на F_A по големина сили, F_B и F'_B , които са противоположно насочени и директрисата им съвпада с тази на F_A , вж. фиг. 9.2. Съгласно аксиома 9.2,

$$(F_B, F'_B) \sim (0).$$

Поради това силите F_B и F'_B могат да се прибавят, според аксиома 9.3, към силата F_A , без да се измени действието на последната, т. е.

$$F_A \sim (F_A, F_B, F'_B). \quad (9.6)$$

В получената система от три сили групираме F_A и F'_B . Те имат обща директриса, а по построение са равни и противоположно насочени. Следователно, съгласно аксиома 9.2, те образуват подсистема, еквивалентна на нула. Затова можем да приложим още веднъж аксиома 9.3, като премахнем тази подсистема:

$$(F_A, F_B, F'_B) \sim (\underline{F_A, F'_B}, F_B) \sim F_B. \quad (9.7)$$

(Подчертаните две сили образуват току-що споменатата подсистема, еквивалентна на нула.) От (9.6) и (9.7) получаваме, че $F_A \sim F_B$, т. е. дадената сила F_A наистина може да се „хлъзне“ по произволен начин по своята директриса и да се приложи в произволно избраната точка B , стига при тази операция големината ѝ да остава неизменна. Лемата е доказана.

9.3. Несвободно тяло. Разглежданията дотук се отнасяха само за случая на свободно тяло, което може да заема произволни положения в пространството. Нека сега тялото е *несвободно*, т. е. на него са наложени някакви ограничения, наречени *връзки*, които стесняват свободата на движението му. Тези връзки отклоняват движението на тялото от онова, което то би имало под действието на дадените сили, ако беше свободно. Затова може да смятаме, че действието на връзките е еквивалентно на действието на определени сили, наречени *сили на реакциите* или *реакции на връзките*. Това води до твърдение, което ще формулираме като следната аксиома:

Аксиома 9.4 (аксиома за връзките). *Всяко несвободно тяло може да се освободи от връзките, като действието им се замени с подходящи сили на реакциите.*

С други думи, тялото може да се разглежда като свободно, но намиращо се под действието не само на външните сили, но и на силите на реакциите. Да подчертаем обаче, че силите на реакциите са неизвестни.

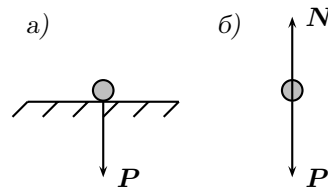
За илюстрация да разгледаме простия пример на тежко тяло, което се намира в покой върху хоризонтална равнина под действието на външната сила (теглото) \mathbf{P} , вж. фиг. 9.3 а). Ролята на връзката (хоризонталната равнина в случая) се състои в това, че тя поддържа тялото, като

не му дава да падне надолу под действието на собственото си тегло. Същата роля обаче ще играе и една вертикално насочена сила \mathbf{N} , вж. фиг. 9.3 б), при условие че

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}. \quad (9.8)$$

Силата \mathbf{N} е реакцията на връзката, а (9.8) е условието, че тялото, освободено от връзките и разглеждано като свободно, се намира в покой под действието на външната сила \mathbf{P} и силата на реакцията \mathbf{N} , т. е. $\mathbf{N} + \mathbf{P} = 0$. (Това очевидно е условието за равновесие на двете сили \mathbf{N} и \mathbf{P} с обща директриса, вж. § 10.1.)

Да отбележим, че съществува една важна разлика между външните сили и силите на реакциите. Докато външните сили могат да бъдат произволни, реакциите зависят от характера на връзките и от приложените външни сили. (Това се илюстрира от съотношението (9.8): докато теглото \mathbf{P} в примера на фиг. 9.3 може да бъде произволно, реакцията \mathbf{N}

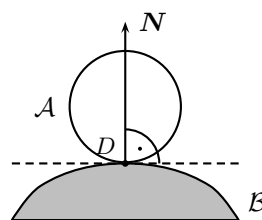


Фиг. 9.3

се определя еднозначно от това тегло.) Поради тази причина външните сили се наричат *активни*, защото те пораждаат или променят движението, а също така те могат да бъдат произволни по големина и посока. Реакциите на свой ред са *пасивни сили*, тъй като те препятстват движението или го ограничават. Освен това те не могат да са произволни по големина и посока при дадените връзки, а зависят от външните сили, т. е. от натоварването на системата.

9.4. Най-често срещани връзки и техните реакции.

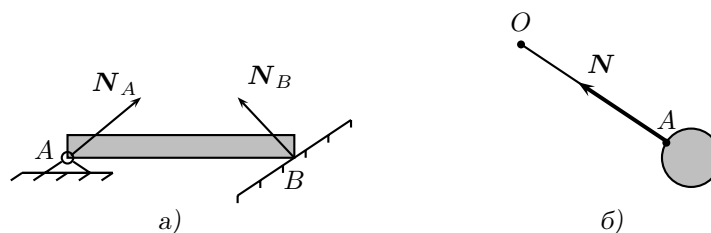
Връзките, наложени върху едно тяло, са обикновено резултат от наличието на други тела, които ограничават движението на тялото. Реакцията възниква в точката на допирание на телата и е насочена обратно на посоката, в която разглежданото тяло е възпрепятствано да се движи. Това се илюстрира на фиг. 9.4, където тялото \mathcal{A} е заставено да се движи (търкаля) по фиксирана повърхнина, ограничаваща тялото \mathcal{B} (връзката). В допирната точка D на телата възниква силата-реакция \mathbf{N} . Ако телата са идеално гладки, то реакцията \mathbf{N} е насочена по общата нормала на повърхнините им в точката D . Ако телата са „гравави“, то в точката D възниква и сила на триене и реакцията вече не е насочена по споменатата нормала.



Фиг. 9.4

Без да прецизираме, тук е достатъчно да кажем, че връзки, чиито реакции са насочени винаги по нормалата на съответните повърхнини, се наричат *идеални* (или още *връзки без триене*). Една по-строга дефиниция на този тип връзки се съдържа в курсовете по аналитична механика. Всички връзки, разглеждани в тази глава, се предполагат идеални.

Нека, в частност, едно от допиращите се тела \mathcal{A} или \mathcal{B} се „изражда“ в точка. В този случай, илюстриран на фиг. 9.5 а) (точката B), реакцията е насочена по нормалата на неизраждащата се повърхнина. Ако двете тела имат една неподвижна обща точка A (фиг. 9.5 а)), около която може да се върти тялото \mathcal{A} (т. нар. *ставна връзка* или просто *става*), то посоката на реакцията не е предварително известна и заедно с големината си реакцията се определя от действащите външни сили и от конфигурацията на системата от тела.



Фиг. 9.5

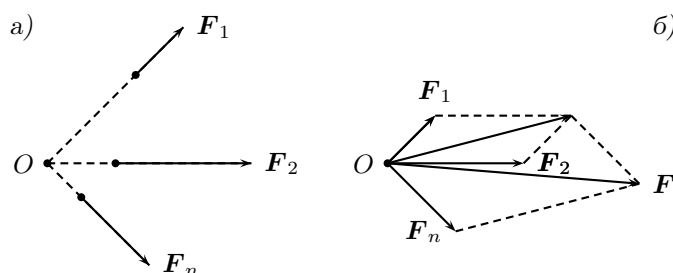
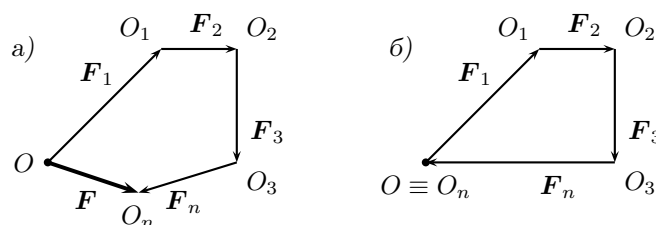
Ако тялото е окачено посредством неразтеглива нишка (или прът) OA в точката O , то реакцията (опъването на нишката) е насочена винаги по нишката, вж. фиг. 9.5 б).

Да подчертаем, че големината, а в някои случаи посоките (при ставата например) на реакциите не са известни предварително и трябва да се определят в зависимост от действащите външни сили, геометрията на връзките и от движението на тялото (в динамичния случай). Това прави задачите на механиката на несвободни точки или тела значително по-сложни от съответните задачи, отнасящи се до движението на свободни тела.

§ 10. Най-прости системи сили

„Въоръжени“ с аксиоматиката на Поансо, изложена току-що, можем да се върнем към основния въпрос на геометричната статика, формулиран в § 9.1, а именно, към каква най-проста еквивалентна система може да се сведе произволна система от сили? За да отговорим на този въпрос, е разумно да го отнесем първо към някои по-елементарни системи. Такъв подход ще ни доведе, в частност, до централното понятие на геометричната статика — двоицата, на чието подробно изследване ще посветим следващия § 11.

Да си припомним, че най-простата система сили е очевидно тази, съдържаща една-единствена сила. Затова е логичен въпросът дали произволна система (\mathcal{S}) може да се сведе до една сила или, с други думи, дали всяка система (\mathcal{S}) има равнодействаща (вж. дефиниция 9.2). Отговорът би бил, разбира се, положителен, ако силата беше свободен вектор. Тя обаче, както вече подчертахме в увода към тази глава, не е такъв вектор. Този именно факт е причината системата (\mathcal{S}) да се свежда в общия случай не само до сила, но и до споменатата вече двоица.

Фиг. 10.1. Сходящи сили и тяхната равнодействаща \mathbf{F} 

Фиг. 10.2. Силев многоъгълник

10.1. Сходящи сили. Силите се наричат *сходящи*, ако директрисите им се пресичат в една точка O , вж. фиг. 10.1 а).

Прилагайки лема 9.1, „хлъзгаме“ всеки един от векторите \mathbf{F}_i по неговата директриса, така че да ги „приложим“ в пресечната точка O , вж. фиг. 10.1 б). По правилото на многоъгълника (аксиома 9.1) така получената система има равнодействаща

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (10.1)$$

Графично равнодействащата \mathbf{F} се намира чрез построяване на *силония многоъгълник* (фиг. 10.2 а). От края O_1 на \mathbf{F}_1 нанасяме силата \mathbf{F}_2 , от края O_2 на така пренесената сила \mathbf{F}_2 нанасяме \mathbf{F}_3 и т. н. Тогава векторът с начало O и край в края O_n на вектора \mathbf{F}_n е именно равнодействащата \mathbf{F} .

Необходимо и достатъчно условие за равновесие на система сходящи сили очевидно е анулирането на равнодействащата сила \mathbf{F} , т. е.

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0. \quad (10.2)$$

Графично условието (10.2) означава, че силовият многоъгълник, съответстващ на системата $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$, е затворен (фиг. 10.2б)).

В проекции на осите на декартова система $Oxyz$ векторното уравнение (10.2) е еквивалентно на три скалярни, отразяващи анулирането на компонентите на равнодействащата \mathbf{F} по трите декартови оси Ox , Oy и Oz :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (10.3)$$

Съотношенията (10.2) или (10.3) представляват уравненията на разглеждания статичен модел, вж. (1.3) или (9.2), за равновесие на система от сили, действаща върху абсолютно твърдо тяло, в частния случай, когато тази система е сходяща.

Впрочем лекотата, с която намерихме тук условията за равновесие, е следствие от факта, че успяхме първо да сведем по практически тривиален начин произволна сходяща система към най-простата възможна, а именно, към една равнодействаща. Важността на подобно свеждане беше вече подчертана в § 9.1. По аналогичен начин ще намерим и условията за равновесие в общия случай (§ 12), като сведем произволна система до сила и двоица.

Преди да продължим обаче, е поучително да се спрем на един прост пример, който илюстрира приложението на условията за равновесие за определяне на неизвестните сили на реакцията в несвободни системи.

Пример 10.1. Тежко³ кълбо, окачено посредством безтегловна и неразтеглива нишка в неподвижна точка O , се дърпа хоризонтално със сила \mathbf{Q} . Да се определят ъгъла α и опъването в нишката, вж. фиг. 10.3 а).

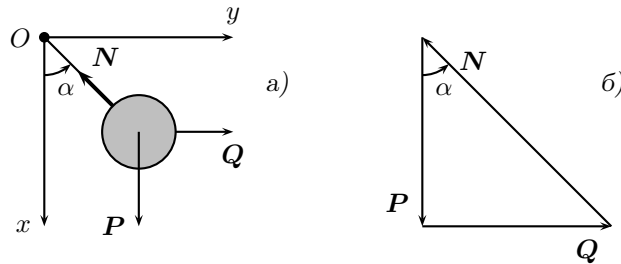
Ще проведем решението геометрично.

Силите \mathbf{P} (тежестта на кълбото), \mathbf{Q} и \mathbf{N} са в равновесие. Освен това те са сходящи (това е интуитивно ясно например от разглеждането на фиг. 10.3 а), макар че едно по-строгово доказателство изисква прилагането на теоремата за трите сили, вж. § 10.2 по-долу).

Щом силите \mathbf{P} , \mathbf{Q} и \mathbf{N} са сходящи и са в равновесие, съответният им силов многоъгълник е затворен. В случая това е правоъгълният триъгълник, показан на фиг. 10.3б). Очевидно е, че

$$P = N \cos \alpha, \quad Q = N \sin \alpha,$$

³Тежко, в смисъл че се намира близо до земната повърхност и върху него действа (вертикално насочената) сила на тежестта.



Фиг. 10.3

откъдето

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}. \quad (10.4)$$

Формулата (10.4) определя големината на търсената реакция N . Самата реакция лежи в равнината, определена от P и Q . С това задачата е решена.

Упражнение 10.1. Изведете съотношенията (10.4) аналитично, като използвате условията (10.3) за анулирането на проекцията на равнодействащата $P + Q + N$ върху осите Ox и Oy , вж. фиг. 10.3 а).

10.2. Теорема за трите сили. Система сили се нарича *равнинна*, ако силите лежат в една обща равнина.

Теорема 10.1 (за трите сили). Ако равнинна система от три неуспоредни сили F_1, F_2, F_3 е в равновесие, то тя е сходяща.

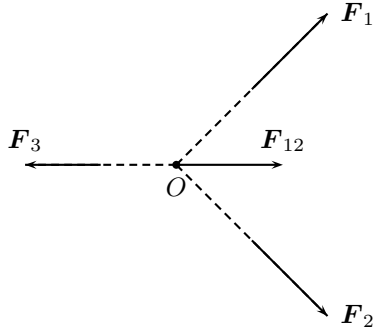
Доказателство. Нека F_1 и F_2 са две неуспоредни сили от системата. Тъй като те лежат, по предположение, в една равнина, то директрисите им се пресичат в точка O (фиг. 10.4), т. е. силите F_1 и F_2 са сходящи с равнодействаща

$$F_{12} = F_1 + F_2.$$

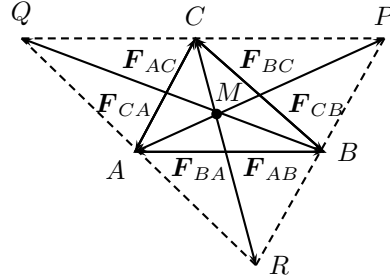
Тогава изходната тройка сили се свежда до еквивалентна система от две сили

$$(F_1, F_2, F_3) \sim (F_{12}, F_3) \sim (0),$$

която, по предположение, е в равновесие. Но съгласно аксиома 3.2, ако две сили са в равновесие, то те имат, в частност, обща директриса. Следователно директрисата на F_3 минава през O , вж. фиг. 10.4. Теоремата е доказана.



Фиг. 10.4



Фиг. 10.5

Теоремата за трите сили има любопитни геометрични приложения. Например да фиксираме $\triangle ABC$, вж. фиг. 10.5, и по всяка една от страните му да построим силите

$$\mathbf{F}_{AB} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{F}_{BA} = \overrightarrow{BA} \quad \text{и т. н.},$$

равни по големина на дължините на съответните страни и две по две противоположно насочени. Тези сили, уравновесявайки се две до две, образуват система, еквивалентна на нула:

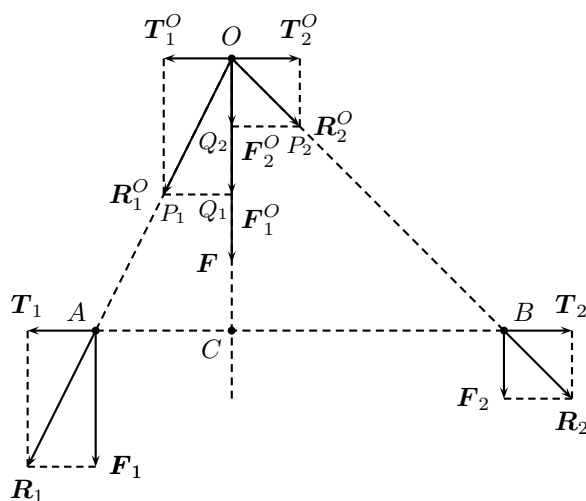
$$(\mathbf{F}_{AB}, \mathbf{F}_{BA}, \mathbf{F}_{BC}, \mathbf{F}_{CB}, \mathbf{F}_{CA}, \mathbf{F}_{AC}) \sim (0). \quad (10.5)$$

Групираме тези шест сили по нов начин: събираме \mathbf{F}_{AB} и \mathbf{F}_{AC} , за да получим силата $\mathbf{F}_{AP} = \overrightarrow{AP}$, насочена по диагонала на успоредника $ABPC$. Аналогично,

$$\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC} = \mathbf{F}_{BQ} = \overrightarrow{BQ}, \quad \mathbf{F}_{CB} + \mathbf{F}_{CA} = \mathbf{F}_{CR} = \overrightarrow{CR}.$$

Предвид (10.5), силите \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{BQ} и \overrightarrow{CR} са в равновесие. Съгласно теоремата за трите сили техните директриси се пресичат в една точка M . Но \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{BQ} и \overrightarrow{CR} са насочени очевидно по медианите на трите страни на $\triangle ABC$. С това доказваме, чрез използване на теоремата за трите сили, че медианите във всеки триъгълник се пресичат в една точка.

Аналогични са разсъжденията, касаещи и други забележителни точки в триъгълника. Например прилагайки във всеки връх на $\triangle ABC$ двойки равни по големина сили, насочени по страните, които излизат от този връх, доказваме, че бисектрисите на триъгълника се пресичат в една точка.



Фиг. 10.6. Равнодействаща на успоредни сили

Упражнение 10.2. Какви сили трябва да приложим по страните на $\triangle ABC$, за да покажем, че височините му се пресичат в една точка?

10.3. Успоредни сили. Под успоредни сили разбираме сили с успоредни директриси и с еднаква посока.

Нека \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 са две успоредни сили с приложни точки съответно A и B , вж. фиг. 10.6. За да сведем системата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ към вече изучената в § 10.1 система от сходящи сили, добавяме двойка равни и противоположно насочени сили $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$, приложени съответно в точките A и B и действащи по правата AB (фиг. 10.6).

Очевидно $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \sim (0)$ (аксиома 9.2). Съгласно аксиома 9.3 добавянето на системата $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$ към системата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ не изменя действието на последната, т. е.

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2). \quad (10.6)$$

В получената система (10.6) събираме две по две силите, приложени в една и съща точка (вж. аксиома 9.1):

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{T}_2,$$

и следователно

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2).$$

По такъв начин системата от успоредни сили се сведе към системата от две сходящи сили $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$.

„Хлъзгаме“ силите \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 по техните директриси до пресичането им в точка O . Тогава силата

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_1^O + \mathbf{R}_2^O \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$$

е еквивалентна на разглежданата двойка успоредни сили $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, т. е. тези две успоредни сили се свеждат до равнодействаща. Тук и по-нататък в доказателството добавяме индекса ‘ O ’, за да подчертаем, че съответната сила е „хлъзната“ или пренесена успоредно в точката O , без да изменя големината си.

За да определим \mathbf{F} , разлагаме силите \mathbf{R}_1^O и \mathbf{R}_2^O , приложени в точката O , на компоненти, успоредни съответно на \mathbf{F}_1 (и \mathbf{F}_2) и на отсечката AB :

$$\mathbf{R}_1^O = \mathbf{F}_1^O + \mathbf{T}_1^O, \quad \mathbf{R}_2^O = \mathbf{F}_2^O + \mathbf{T}_2^O,$$

където $\mathbf{F}_i^O, \mathbf{T}_i^O$ са съответно силите $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$, пренесени успоредно от точките A или B в точката O , $i = 1, 2$. Очевидно $\mathbf{T}_2^O = -\mathbf{T}_1^O$ и затова

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_1^O + \mathbf{R}_2^O = \mathbf{F}_1^O + \mathbf{F}_2^O.$$

Но \mathbf{F}_i^O е успоредна и равна, по построение, на \mathbf{F}_i , $i = 1, 2$. Следователно равнодействащата \mathbf{F} е също успоредна на \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 и има големина $F = F_1 + F_2$.

Остава да се намери точката C , в която тази равнодействаща пресича отсечката AB , съединяваща приложните точки на силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 . За целта разглеждаме $\triangle OAC$ и $\triangle OP_1Q_1$, вж. отново фиг. 10.6. По построение тези триъгълници са подобни и затова

$$\frac{F_1}{|OC|} = \frac{T_1}{|AC|}. \quad (10.7)$$

Аналогично, от подобие на $\triangle OBC$ и $\triangle OP_2Q_2$ намираме

$$\frac{F_2}{|OC|} = \frac{T_2}{|BC|}. \quad (10.8)$$

(В (10.7) и (10.8) използваме, че по построение $T_i^O = T_i$, $F_i^O = F_i$, $i = 1, 2$.)

Разделяме пропорциите (10.7) и (10.8):

$$\frac{F_1}{|BC|} = \frac{F_2}{|AC|}, \quad (10.9)$$

като използваме, че $T_1 = T_2$. Пропорцията (10.9) означава, че точката C , през която минава директрисата на равнодействащата, *разделя вътрешно отсечката AB на части, обратно пропорционални на големината на силите F_1 и F_2 .*

Да съберем числителите и знаменателите на пропорцията (10.9), като забележим, че $F = F_1 + F_2$ е големината на равнодействащата, а $|AC| + |BC| = |AB|$. Тогава

$$\frac{F_1}{|BC|} = \frac{F_2}{|AC|} = \frac{F}{|AB|}. \quad (10.10)$$

Очевидно (10.9) може да се запише също във вида

$$F_1 h_1 = F_2 h_2, \quad (10.11)$$

където h_i са съответно разстоянията от C до директрисите на силите F_i , $i = 1, 2$. Всяко такова разстояние се нарича *рамо* на сила F_i спрямо точката C , вж. § 11.1. Съотношението (10.10) или (10.11) е *правилото на лоста на Архимед*.

10.4. Антиуспоредни сили. В този случай директрисите на силите са отново успоредни, но силите са противоположно насочени.

Нека F_1 и F_2 са две антиуспоредни сили, вж. фиг. 10.7. Да предположим, че $F_1 > F_2$, т. е. $F = F_1 - F_2 > 0$.

Представяме силата F_1 като равнодействаща на две успоредни сили F и F_3 :

$$F_1 \sim (F, F_3). \quad (10.12)$$

Силата F_3 е приложена в точката B , като $F_3 = F_2$, вж. фиг. 10.7. Силата F е приложена в точка C от правата, определена от отсечката AB . Положението на C ще определим по-нататък. Тъй като F_1 е равнодействаща на F и F_3 , то

$$F_1 = F_3 + F,$$

съгласно доказаното в § 10.3. Оттук

$$F = F_1 - F_3 = F_1 - F_2,$$

тъй като $F_3 = F_2$.

Като използваме (10.12), заменяме разглежданата двойка антиуспоредни сили с еквивалентна система

$$(F_1, F_2) \sim (F, \underline{F_3}, F_2) \sim F, \quad (10.13)$$

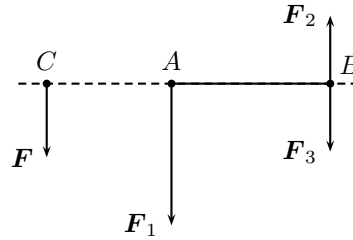
защото подчертаната подсистема

$$(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_2) \sim (0)$$

и затова премахването ѝ е допустимо, вж. фиг. 10.7 и аксиоми 9.2 и 9.3. Равенството (10.13) означава, че разглежданата двойка антиуспоредни сили има равнодействаща \mathbf{F} с посока, съвпадаща с посоката на по-голямата сила \mathbf{F}_1 , и с големина $F = F_1 - F_2$.

За да определим приложната точка C на равнодействащата, прилагаме правилото на лоста (10.10). Тъй като \mathbf{F}_1 по построение е равнодействаща на успоредните сили \mathbf{F} и \mathbf{F}_3 и $F_3 = F_2$, то

$$\frac{F}{|AB|} = \frac{F_2}{|AC|} = \frac{F_1}{|BC|}. \quad (10.14)$$



Фиг. 10.7

Пропорцията (10.14) означава, че точката C разделя отсечката AB , съединяваща приложните точки на силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , външно в отношение, обратно пропорционално на големините им (правилото на лоста на Архимед за антиуспоредни сили).

Дължината на отсечката AC намираме от първите две равенства на (10.14):

$$|AC| = \frac{F_2}{F_1 - F_2} |AB|, \quad (10.15)$$

тъй като $F = F_1 - F_2$.

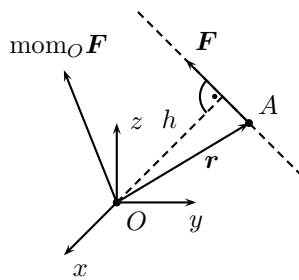
10.5. Двоица сили. Да предположим, че $F_1 \rightarrow F_2$, в смисъл че при фиксирана големина на \mathbf{F}_2 големината на \mathbf{F}_1 намалява и клони към тази на \mathbf{F}_2 . В този случай, съгласно (10.15), $|AC| \rightarrow \infty$, т.е. приложната точка C на равнодействащата \mathbf{F} се отдалечава безкрайно от точката A , а големината на равнодействащата $F = F_1 - F_2 \rightarrow 0$. Оттук се вижда, че системата от две равни антиуспоредни сили няма равнодействаща. От друга страна, тази система, наречена двоица, без съмнение е ненулева. (Това следва от аксиома 9.2: при двоицата силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 имат равни големина, но директрисите им не съвпадат.) Двоицата представлява „самостоятелен“ елемент в статиката, независим от силата, който има, образно казано, чисто ротационен ефект върху тялото.

Построеният пример на двоица — ненулева система, която няма равнодействаща — показва, че произволна система от сили не може да се сведе само до една-единствена сила.

Този факт поражда естествения въпрос: а не се ли свежда произволна система сили до една сила и една двоица? Отговорът вече е положителен (§ 12). Преди да стигнем до него, се налага обаче да изучим по-подробно новия статичен елемент, който се появи току-що, а именно, двоицата.

§ 11. Теория на двоиците

11.1. Момент на сила. Разглеждаме сила \mathbf{F} с приложна точка A , вж. фиг. 11.1. Фиксираме точката O (т. нар. *полюс*). По определение векторното произведение



Фиг. 11.1

$$\text{mom}_O \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.1)$$

се нарича *момент на силата \mathbf{F} спрямо точката O* . По-нататък ще свързваме вектора-момент с точката O . Това е естествено, тъй като $\text{mom}_O \mathbf{F}$ очевидно зависи от избора на полюса O .

Както е известно, векторното произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ е вектор, насочен перпендикулярно на векторите \mathbf{r} и \mathbf{F} (т. е. перпендикулярно на равнината, определена от \mathbf{r} и \mathbf{F}), така че векторите \mathbf{r} , \mathbf{F} и $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ да образуват дясна тройка. Това означава, че той е насочен така, че от върха му „завъртането“ на \mathbf{r} към \mathbf{F} е в положителна посока, т. е. обратно на движението на часовниковата стрелка. По големина векторът $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ е равен на лицето на успоредника, построен върху векторите \mathbf{r} и \mathbf{F} , т. е.

$$|\text{mom}_O \mathbf{F}| = Fh, \quad (11.2)$$

където h е дължината на перпендикуляра, спуснат от O към директрисата на \mathbf{F} , вж. фиг. 11.1; h се нарича *рамо на силата \mathbf{F} спрямо полюса O* .

Нестрого казано, моментът $\text{mom}_O \mathbf{F}$ на силата \mathbf{F} представлява характеристика на „въртеливия ефект“, който има \mathbf{F} спрямо точката O .

За да поясним това, да си представим, че векторът $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ е прът, към чийто край A прилагаме силата \mathbf{F} , за да го завъртим около неподвижния му край O . Тогава „въртеливият ефект“ спрямо O ще бъде, образно казано, толкова „по-голям“, колкото са по-големи приложената сила \mathbf{F} и рамото ѝ h . Ако $h = 0$, то силата минава през O и въртелив ефект изобщо няма. Поради това е естествено да характеризираме споменатия ефект с произведението Fh , вж. (11.2). От друга страна, „въртеливият ефект“ трябва да бъде векторна величина, за да може да се определи равнината, в която се осъществява въртенето. Векторът-момент (11.1) е точно такава величина — въртенето е в равнината, която минава през точката O и е перпендикулярна на този вектор.

Да напомним, че спрямо декартова координатна система $Oxyz$ с начало O , вж. фиг. 11.1, за вектора-момент $\text{mom}_O \mathbf{F}$ е в сила следното детерминантно представяне:

$$\text{mom}_O \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (11.3)$$

$$= (yF_z - zF_y) \mathbf{i} + (zF_x - xF_z) \mathbf{j} + (xF_y - yF_x) \mathbf{k},$$

където \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} са съответно трите орта (единичните вектори) на осите Ox , Oy и Oz , x , y и z са компонентите на \mathbf{r} , а F_x , F_y и F_z — компонентите на силата \mathbf{F} по координатните оси. По-нататък ще използваме многократно и формулата за разлагане на двойното векторно произведение⁴:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (11.4)$$

11.2. Момент на двоица. Нека $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ е двоица, т. е. система от две равни и антиуспоредни сили (§ 10.5). Равнината, определена от силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , се нарича *равнина на двоицата*, а разстоянието h между техните директриси — *рамо на двоицата*, вж. фиг. 11.2.

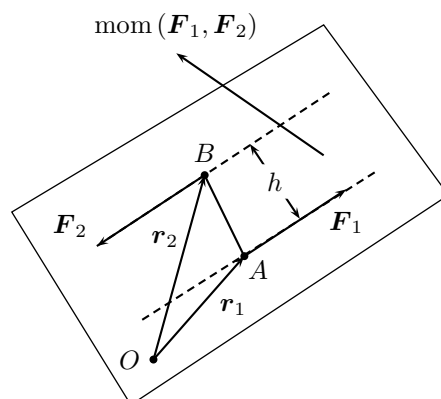
Въвеждаме вектора-момент (или просто момента) $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ на двоицата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ по следния начин:

1) векторът $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ е свободен и е перпендикулярен на равнината на двоицата, като е насочен в посока, от която въртенето, определено от двоицата, е положително;

2) големината на момента е произведението от големината на силата \mathbf{F}_1 (или \mathbf{F}_2) и рамото, т. е.

$$|\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)| = F_1 h. \quad (11.5)$$

⁴Да напомним мнемоничното правило $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \text{БАЦ} - \text{ЦАБ}$.



Фиг. 11.2. Момент на двоица

Интуитивно, моментът $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ може да се интерпретира подобно на момента на сила (§ 11.1) като характеристика на „въртеливия ефект“ на дадената двоица. Този ефект ще бъде толкова „по-голям“, колкото е по-голяма силата $F_1 = F_2$ и рамото h . Естествена характеристика на споменатия ефект тогава е произведението Fh , вж. (11.5). С посоката си векторът $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ определя на свой ред равнината на двоицата с точност до произволна трансляция. Но при такава трансляция (без изменение на големината на силата и на рамото на двоицата) действието ѝ не се мени, както ще видим по-нататък в лема 11.2. Това обяснява защо именно $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ се въвежда като свободен вектор.

Основната цел на този параграф е да покажем, че векторът-момент представлява основната характеристика на една двоица. По-специално ще покажем, че двоиците се събират, като се събират техните моменти. Нещо повече, съвпадението на векторите-моменти на две двоици гарантира тяхната еквивалентност.

Преди да се заемем с доказателствата на тези два централни резултата на геометричната статика, е необходимо да се спрем на няколко прости свойства на момента на двоица.

11.3. Свойства на вектора-момент на двоица

1) Двоицата се „анулира“ (т. е. еквивалентна е на нула) тогава и само тогава, когато нейният вектор-момент е нулев:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (0) \Leftrightarrow \text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 0. \quad (11.6)$$

Действително, ако $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 0$, то $F_1 h = 0$ и затова или F_1

$= F_2 = 0$, в който случай системата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ е просто нулева, или $h = 0$. Във втория случай силите F_1 и F_2 имат обща директриса, т. е. те са равни и срещуположно насочени и съгласно аксиома 9.2 образуват система, еквивалентна на нула.

Обратно, ако $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (0)$, то съгласно същата аксиома 9.2 силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 имат обща директриса. Това означава, че рамото $h = 0$ и следователно $F_1 h = 0$, т. е. $\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 0$.

2) Моментът на двоицата е равен на момента на всяка една от силите и спрямо приложната точка на другата сила.

Действително от определението на момента на сила (11.1) веднага се проверява, че

$$\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}_2 = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}_1. \quad (11.7)$$

3) Моментът на двоицата е равен на сумата от моментите на силите и спрямо произволен полюс O .

Действително нека O е произволен полюс. Тогава $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (фиг. 11.2) и с помощта на (11.7) намираме

$$\begin{aligned} \text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) &= \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_2 \\ &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Да обърнем внимание, че в тази формула, както и в (11.7), моментите на силите се разглеждат като свободни вектори, тъй като те се свързват с момента на двоица — свободен вектор по дефиниция. При такова разглеждане на момента на сила $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 = -\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, което, заместено в (11.8), дава

$$\text{mom}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2. \quad (11.9)$$

С това свойство 3) е доказано.

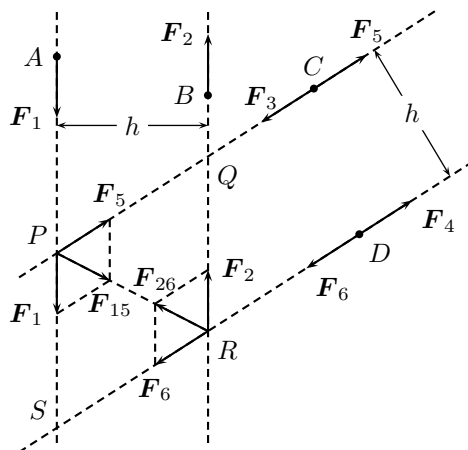
11.4. Теорема за събиране на двоици

Теорема 11.1. Нека $(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2)$ и $(\mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2)$ са две двоици. Тогава тяхната сума е еквивалентна на една двоица $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, т. е.

$$(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2) \sim (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2),$$

чийто вектор-момент е векторната сума от векторите-моменти на двете изходни двоици,

$$\text{mom}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \text{mom}(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2) + \text{mom}(\mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2). \quad (11.10)$$



Фиг. 11.3

Доказателството на тази теорема е просто следствие на следните три леми.

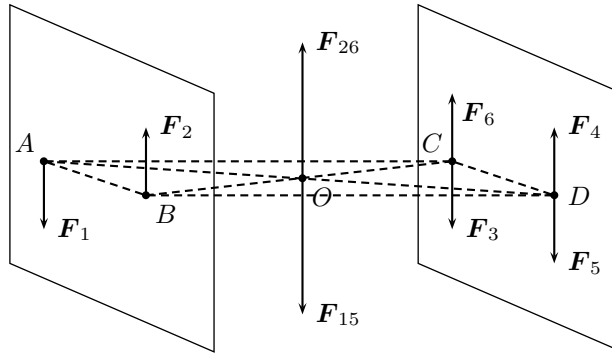
Лема 11.1. *Действието на двоицата не се изменя, ако я преместим по произволен начин в нейната равнина (без да изменяме силите и рамото на двоицата).*

Доказателство. Нека $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ е двоица с рамо h и приложни точки на \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 съответно A и B . Построяваме в равнината ѝ две успоредни прави, разстоянието между които е също h ; в две произволни точки C и D на тези прави прилагаме по две сили $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_5$ и $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_6$, равни по големина на силите от двоицата (фиг. 11.3). Съгласно аксиома 9.3 можем да добавим към дадената двоица четирите сили $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5$ и \mathbf{F}_6 , без да изменим действието ѝ:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \mathbf{F}_6). \quad (11.11)$$

Групираме шестте сили $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_6$ по следния начин. Хлъзгаме силата \mathbf{F}_1 по нейната директриса, докато приложната ѝ точка съвпадне с пресечната точка P на директрисата ѝ с тази на \mathbf{F}_5 . Аналогично, хлъзгаме \mathbf{F}_5 до точката P , вж. фиг. 11.3. По същия начин хлъзгаме \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_6 по техните директриси до точката R . (Това е възможно, тъй като силата е хлъзгащ вектор, вж. лема 9.1.) Силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_5 , както и \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_6 , заменяме с техните равнодействащи:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_5) \sim \mathbf{F}_{15}, \quad (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_6) \sim \mathbf{F}_{26}.$$



Фиг. 11.4

Системата от шест сили в (11.11) се свежда по този начин до четири:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_{15}, \mathbf{F}_{26}) . \quad (11.12)$$

Но четириъгълникът $PQRS$ на фиг. 11.3 е очевидно ромб и затова \mathbf{F}_{15} и \mathbf{F}_{26} имат като обща директриса диагонала PR ; те са равни по големина и противоположно насочени. Съгласно аксиома 9.2, $(\mathbf{F}_{15}, \mathbf{F}_{15}) \sim (0)$ и прилагайки още един път аксиома 9.3, от (11.12) намираме

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) .$$

Остава да забележим, че $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)$ представлява изходната двоица $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, хлъзната и завъртяна по произволен начин в равнината ѝ, при фиксирана големина на силата и на рамото. (Построената двойка успоредни прави е произволна, стига разстоянието между тях да е h . Произволен е също изборът на точките C и D върху тези прави.) С това лемата е доказана.

Упражнение 11.1. В проведеното току-що доказателство двоицата при хлъзгането си се завърта така, че директрисите на $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)$ и на $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ не са успоредни. Проведете доказателството в случая, когато тези директриси са успоредни.

Лема 11.2. Действието на двоицата не се изменя, ако пренесем равнината на действието ѝ успоредно на себе си.

Доказателство. Да пренесем мислено двоицата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ заедно с равнината ѝ на действие успоредно на себе си. Нека приложните точки A и B на силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 да заемат съответно положения C и D , вж. фиг. 11.4.

Ясно е, че четириъгълникът $ABDC$ е успоредник. В точките C и D прилагаме по две равни и противоположно насочени сили $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_6$ и $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_5$ (фиг. 11.4), равни по големина на силите от изходната двойца и успоредни на тях. Прилагаме практически дословно разсъжденията от доказателството на лема 11.1. Очевидно

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5, \mathbf{F}_6) . \quad (11.13)$$

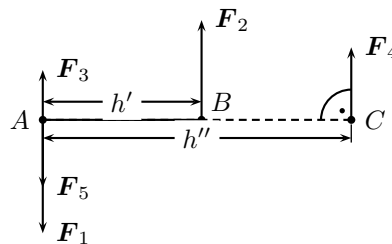
Силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_5 са успоредни и равни. Съгласно правилото на лоста (§ 10.3) те имат равнодействаща \mathbf{F}_{15} , приложена в средата O на диагонала AD на успоредника $ABDC$ и равна по големина на $2F_1$. Аналогично, \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_6 имат равнодействаща \mathbf{F}_{26} , приложена в средата на диагонала BC (т. е. в същата точка O , където е приложена \mathbf{F}_{15}), която по големина е равна на $2F_2$ и спрямо \mathbf{F}_{15} е противоположно насочена. Следователно $\mathbf{F}_{15} = -\mathbf{F}_{26}$, т. е. $(\mathbf{F}_{15}, \mathbf{F}_{26}) \sim (0)$, и от (11.13) намираме

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{F}_{15}, \mathbf{F}_{26}) \sim (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) .$$

Тъй като изборът на успоредната равнина, в която пренасяме $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, както и на точките C и D в нея (стига \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{AB} да са успоредни и равни), е произволен, лемата е доказана.

Лема 11.3. Действието на двойцата не се изменя, ако при дадената посока на въртене на двойцата изменим силите и рамото ѝ така, че тяхното произведение да остане постоянно.

Доказателство. Хлъзгаме силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 по техните директриси, прилагайки ги съответно в точките A и B , така че $AB \perp \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, вж. фиг. 11.5. Използваме правилото за редукция на успоредни сили (§ 10.3): представяме \mathbf{F}_2 като равнодействаща на две успоредни сили \mathbf{F}_3 и \mathbf{F}_4 , приложени съответно в точките A и C :



Фиг. 11.5

$$\mathbf{F}_2 \sim (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) .$$

Тогава

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) .$$

Силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_3 имат равнодействаща $\mathbf{F}_5 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_3$ с големина $F_5 = F_1 - F_3$.

Но $F_2 = F_3 + F_4$ по построение, т. е. $F_4 = F_1 - F_3$ (тъй като $F_1 = F_2$), и следователно силите F_4 и F_5 са равни и антиуспоредни, т. е. образуват двоица, която е еквивалентна на изходната:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5) .$$

Съгласно „правилото на лоста“ (10.10)

$$\frac{F_4}{|AB|} = \frac{F_2}{|AC|} .$$

Но $|AB| = h'$ е рамото на двоицата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, а $|AC| = h''$ е рамото на еквивалентната двоица $(\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_5)$, вж. фиг. 11.5. (Да напомним, че отсечката AC е перпендикулярна на директрисите на силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 .) Следователно $F_1 h' = F_4 h''$ и лемата е доказана.

Доказателство на теоремата за събиране на двоици. Ще разгледаме общия случай, когато равнините на двете двоици не са успоредни. Фиксираме отсечка AB върху пресечницата на равнините на двете двоици (фиг. 11.6). С помощта на леми 11.1 и 11.3 заменяме двоицата $(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2)$ с еквивалентна двоица $(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2)$ с рамо AB ; аналогично заменяме $(\mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2)$ с еквивалентната двоица $(\mathbf{P}''_1, \mathbf{P}''_2)$ със същото рамо AB . (С други думи, привеждаме дадените двоици към общо рамо AB , хлъзгайки ги в техните равнини и изменяйки големината на силите за сметка на дължината на рамото.) По такъв начин

$$(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2) \sim (\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \mathbf{P}''_1, \mathbf{P}''_2) . \quad (11.14)$$

При това очевидно

$$\begin{aligned} \text{mom}(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2) &= \text{mom}(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2) , \\ \text{mom}(\mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2) &= \text{mom}(\mathbf{P}''_1, \mathbf{P}''_2) , \end{aligned} \quad (11.15)$$

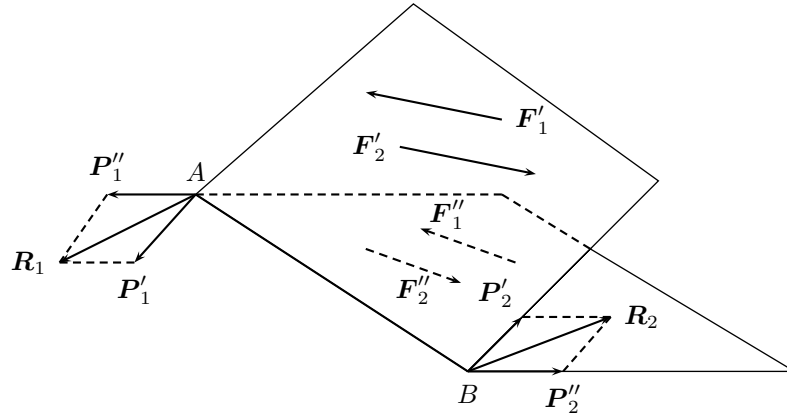
тъй като при операциите, описани в леми 11.1 и 11.3, векторите-моменти на съответните двоици не се изменят.

Силите \mathbf{P}'_1 и \mathbf{P}''_1 са приложени в точката A и затова имат равнодействаща \mathbf{R}_1 . Аналогично, \mathbf{P}'_2 и \mathbf{P}''_2 , като приложени в точката B , имат равнодействаща \mathbf{R}_2 , т. е.

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}''_1, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{P}'_2 + \mathbf{P}''_2 . \quad (11.16)$$

Очевидно \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 са равни и антиуспоредни, т. е. образуват двоица, еквивалентна на сумата от двете дадени двоици:

$$(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2) \sim (\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \mathbf{P}''_1, \mathbf{P}''_2) \sim (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) ,$$



Фиг. 11.6

вж. (11.14).

Да пресметнем момента на двойката $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$. Съгласно (11.7), (11.15) и (11.16),

$$\begin{aligned} \text{mom}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &= \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R}_1 = \overrightarrow{BA} \times (\mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}''_1) \\ &= \overrightarrow{BA} \times \mathbf{P}'_1 + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{P}''_1 = \text{mom}(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2) + \text{mom}(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}''_2) \\ &= \text{mom}(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2) + \text{mom}(\mathbf{F}''_1, \mathbf{F}''_2), \end{aligned}$$

с което теоремата за събиране на двойци е доказана.

Упражнение 11.2. Проведете доказателството на теоремата за събиране на двойци в случая, когато равнините на двете двойци са успоредни.

11.5. Условие за еквивалентност на двойци. За пълнота на изложението ще покажем, в заключение на този параграф, че моментът представлява определяща характеристика на една двойка по смисъла на следната теорема.

Теорема 11.2 (теорема за еквивалентност на двойци). Ако векторите-моменти на две двойци са равни (като свободни вектори), то двойците са еквивалентни.

Доказателство. Доказателството отново е просто следствие на трите леми, доказани в § 11.4.

Нека $(S') = (F'_1, F'_2)$ и $(S'') = (F''_1, F''_2)$ са две двоици и нека

$$\text{mom}(F'_1, F'_2) = \text{mom}(F''_1, F''_2). \quad (11.17)$$

Първо, щом векторите-моменти съвпадат, двете двоици, в частност, действат в успоредни равнини. Съгласно лема 11.2 тогава можем да пренесем едната двоица заедно с равнината ѝ, да речем (S'') , така че (S') и (S'') да действат в една и съща равнина \mathcal{P} — равнината на (S') .

Второ, използвайки лема 11.1, „хлъзгаме“ една от двоиците, да речем пренесената вече (S'') , в равнината \mathcal{P} , така че рамото ѝ да „легне“ върху това на (S') , а силите F'_1 и F''_1 да имат обща директриса и посока.

Трето, използвайки лема 11.3, заменяме двоицата (S'') с еквивалентна двоица $(T) = (T_1, T_2)$, чието рамо h съвпада с рамото h' на (S') , $h = h'$. Силите на новата двоица (T) ще имат големина $T_1 = T_2$, така че

$$F''_1 h'' = T_1 h' \quad (11.18)$$

съгласно същата лема. Но по условие

$$F'_1 h' = F''_1 h'', \quad (11.19)$$

тъй като векторите-моменти на (S') и (S'') съвпадат по условие не само по посока, но и по големина, вж. (11.17). От (11.18) и (11.19) сега следва

$$F'_1 h' = T_1 h', \quad \text{т. е.} \quad F'_1 = T_1.$$

Това означава, че двоицата (T) , „лягайки“ върху двоицата (S') след направените операции, съвпада с последната. Но $(T) \sim (S'')$ по построение и следователно $(S') \sim (S'')$. С това теоремата е доказана.

§ 12. Свеждане на произволна система сили към сила и двоица. Условие за равновесие на система сили

12.1. Основна лема на статиката (лема на Поансо). *Всяка сила F_A , приложена към абсолютно твърдо тяло в точка A , е еквивалентна на система, състояща се от същата сила, но пренесена успоредно на себе си и приложена в точка B от тялото, и на двоица, чийто момент е равен на момента на F_A спрямо точката B .*

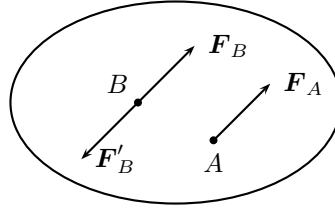
Доказателство. Въвеждаме двойката равни и противоположно насочени сили \mathbf{F}_B и \mathbf{F}'_B , приложени в точката B от тялото, като $\mathbf{F}_A \parallel \mathbf{F}_B$, вж. фиг. 12.1. (Знакът \parallel означава, че двете сили \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B са успоредни и равни по големина.)

Съгласно аксиома 9.2

$$(\mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B) \sim (0)$$

и следователно, съгласно аксиома 9.3,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &\sim (\mathbf{F}_A, (\mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B)) \\ &\sim (\mathbf{F}_B, (\mathbf{F}_A, \mathbf{F}'_B)) . \end{aligned}$$



Фиг. 12.1

По построение \mathbf{F}_A и \mathbf{F}'_B са равни и антиуспоредни, т. е. те образуват двойца, чийто момент, съгласно (11.7), е

$$\text{mom}(\mathbf{F}_A, \mathbf{F}'_B) = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}_A .$$

От друга страна, \mathbf{F}_B по построение е успоредна и равна на \mathbf{F}_A , т. е. това е същата сила \mathbf{F}_A , но пренесена успоредно на себе си и приложена в точката B . Лемата е доказана.

Тази лема показва, че успоредното „пренасяне“ на сила, приложена към абсолютно твърдо тяло, от една точка на тялото в друга е възможно, при условие че се „компенсира“ с подходяща двойца.

12.2. Свеждане (редукция) на произволна система сили към сила и двойца. Нека

$$(\mathcal{S}) = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$$

е произволна система от сили, приложени съответно в точки A_1, \dots, A_n , вж. фиг. 12.2.

Избираме произволна точка O в пространството, която наричаме *полюс* (или *център на редукция*). Нека $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$ са радиус-векторите на приложните точки A_i на силите \mathbf{F}_i спрямо полюса O , $i = 1, \dots, n$. Пренасяме една по една силите \mathbf{F}_i , успоредно сами на себе си, от приложните им точки A_i в полюса O , $i = 1, \dots, n$. Съгласно основната лема на статиката (лема 12.1) всяко такова пренасяне поражда двойца с момент $\text{mom}_O \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Системата сили, пренесени и приложени в точката O , е еквивалентна на тяхната векторна сума, т. е. на силата

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (12.1)$$

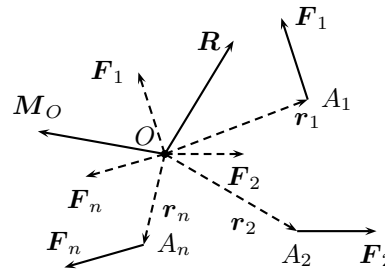
която се нарича *главен вектор* на системата (\mathcal{S}). Съгласно теоремата за събиране на двоици (теорема 11.1) n -те двоици, породени от пренасянето на силите от A_i в O , са еквивалентни на една двоица с момент

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (12.2)$$

Векторът \mathbf{M}_O , дефиниран в (12.2), се нарича *главен момент* на системата сили (\mathcal{S}) спрямо полюса O .

Проведеното току-що разсъждение позволява да формулираме следната централна теорема на геометричната статика.

Теорема 12.1. *Произволна система от сили $(\mathcal{S}) = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$, приложена към абсолютно твърдо тяло, е еквивалентна на една сила — главния вектор \mathbf{R} — приложена в полюса O , и на една двоица $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ с момент, равен на главния момент \mathbf{M}_O на системата спрямо O :*



Фиг. 12.2

$$(\mathcal{S}) = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) \sim (\mathbf{R}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), \quad (12.3)$$

$$\text{mom}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \mathbf{M}_O.$$

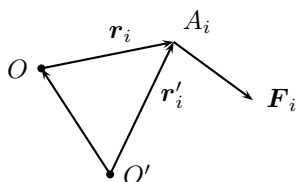
Да подчертаем, че главният вектор в общия случай *не* е равнодействаща на системата сили (\mathcal{S}). Той ще бъде равнодействаща единствено ако главният момент спрямо дадения полюс се анулира, $\mathbf{M}_O = 0$. Тогава $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim (0)$ и $(\mathcal{S}) \sim \mathbf{R}$, т. е. системата (\mathcal{S}) е еквивалентна на една сила, вж. (12.3), (11.6) и дефиниция 9.2.

Теорема 12.1 дава отговор на основния въпрос на геометричната статика, поставен в § 9.1 — към каква най-проста (или, по-точно, достатъчно проста) система може да се сведе произволна система от сили, приложена към абсолютно твърдо тяло. Отговорът на Поансо, обоснован по-горе,

се състои в това, че всяка такава система може да се сведе към система от една сила и една двойца.⁵ Оттук вече е лесно да се достигне до условията за равновесие на система от сили (§ 12.4). Преди това се налага обаче да проанализираме доколко и как главният вектор \mathbf{R} и главният момент \mathbf{M}_O на системата сили (\mathcal{S}) зависят от избора на полюса O . (Забележете, че този избор в момента е изцяло в наши ръце.)

12.3. Зависимост на главния вектор и главния момент от избора на полюса. От проведеното в § 12.2 разсъждение е ясно, че главният вектор \mathbf{R} не зависи от избора на полюса: премествайки полюса от O в O' , ние само пренасяме успоредно вектора \mathbf{R} от O в O' . Това означава, че \mathbf{R} е инвариант (т. нар. *първи инвариант*) на системата сили (\mathcal{S}), т. е. величина, която е свързана единствено със системата и не зависи от избора на полюса O .

За да изведем зависимостта на главния момент \mathbf{M}_O от полюса O , фиксираме втори полюс O' , вж. фиг. 12.3. Тъй като



Фиг. 12.3

$$\mathbf{r}'_i = \overrightarrow{O'A_i} = \mathbf{r}_i + \overrightarrow{O'O},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \overrightarrow{O'O}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \overrightarrow{O'O} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \end{aligned}$$

Оттук, съгласно (12.1) и (12.2), получаваме

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O + \text{mom}_{O'} \mathbf{R}, \quad (12.4)$$

т. е. при пренасянето на полюса от O в O' главният момент се изменя с вектор, равен на момента на главния вектор спрямо новия полюс O' .

От формулата (12.4) се вижда, че макар главният момент да зависи от избора на полюса O , скаларното произведение на главния вектор и главния момент спрямо произволен полюс O е постоянно. Това, заедно с инвариантността на \mathbf{R} , води до заключението, че

⁵Ефектът от сила, приложена към тяло, може да асоциираме с „дърпане“ или „бутане“, а от двойца сили — с „въртене“. Отговорът на Поансо при подобна „интерпретация“ тогава означава, образно казано, че ефектът от произволна система от сили се свежда до комбинация от „дърпане“ и „въртене“.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O, \quad \forall O, O', \quad (12.5)$$

тъй като $\mathbf{R} \cdot (\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}) = 0$, вж. (12.4). Да отбележим, че (12.5) съдържа в себе си и факта, че проекцията на главния момент върху главния вектор остава неизменна, както и да изменяме полюса.

Величината $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O$ е т. нар. втори инвариант на системата сили (\mathcal{S}).

12.4. Условие за равновесие на система сили

Теорема 12.2. Система от сили ($\mathcal{S} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$), приложена към абсолютно твърдо тяло, е в равновесие тогава и само тогава, когато главният ѝ вектор и главният ѝ момент спрямо някой полюс O се анулират:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (12.6)$$

Интуитивно, условието (12.6) е свършено естествено: както вече отбелязахме по-горе (вж. забележката под линия на стр. 100), всяка система от сили, приложени към тяло, се свежда до едно „дърпане“ (дължащо се на главния вектор \mathbf{R}) и до едно „въртене“ (в резултат на действието на двоицата с момент, равен на главния момент \mathbf{M}_O). Очевидно системата ще е в равновесие, когато тя, образно казано, нито „дърпа“, нито „върти“, т. е. $\mathbf{R} = \mathbf{M}_O = 0$. За пълнота обаче ще приведем и формалното доказателство на този факт, което е съвсем елементарно.

Преди да започнем това доказателство, ще отбележим, че във формулировката на теорема 12.2 има нещо на пръв поглед странно — полюсът O , „избран“ от нас, участва явно в условията за равновесие (12.6). От (12.4) се вижда обаче, че щом $\mathbf{R} = 0$, то $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'}, \forall O, O'$, и затова при нулев главен вектор анулирането на главния момент спрямо една точка гарантира анулирането му и спрямо всяка друга точка. По такъв начин условията за равновесие (12.6) са независими от избора на полюса — каквито и трябва да бъдат.

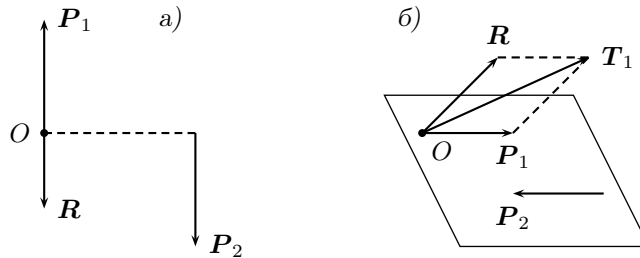
Доказателство на теорема 12.2. Нека главният вектор и главният момент на системата (\mathcal{S}) се анулират. Щом $\mathbf{R} = 0$, то

$$(\mathcal{S}) \sim (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), \quad (12.7)$$

вж. (12.3), т. е. (\mathcal{S}) се свежда до една двоица, чийто момент $\text{mom}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \mathbf{M}_O$ се анулира по условие. Поради това двоицата $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, а заедно с нея и системата (\mathcal{S}), е в равновесие съгласно (12.7) и (11.6).

Обратно, нека $(\mathcal{S}) \sim (0)$, т. е.

$$(\mathcal{S}) \sim (\mathbf{R}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim (0), \quad (12.8)$$



Фиг. 12.4

вж. (12.3). В зависимост от взаимното разположение на главния вектор \mathbf{R} и главния момент \mathbf{M}_O са възможни два случая. В първия \mathbf{R} и \mathbf{M}_O са взаимно-перпендикулярни:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \quad (12.9)$$

т. е. вторият инвариант на системата се анулира. Това означава, че главният вектор е успореден на равнината на двоицата $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ съгласно дефиницията на момента на двоица (§ 11.2).

Като използваме лемите 12.1 и 12.2, последователно завъртаме двоицата $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ и я пренасяме успоредно на себе си, докато векторите \mathbf{R} , \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 „легнат“ в една равнина, а \mathbf{R} и \mathbf{P}_1 се окажат с обща директриса и обща приложна точка в полюса O , вж. фиг. 12.4 а). Трите сили \mathbf{R} , \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , като успоредни, имат равнодействаща \mathbf{F} с големина

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{R}, \quad (12.10)$$

тъй като \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 са равни по големина и антиуспоредни. Но щом $(\mathcal{S}) \sim (0)$, то и \mathbf{F} трябва да се анулира, т. е. $\mathbf{R} = 0$, вж. (12.10), и системата (\mathcal{S}) се свежда само до двоица — $(\mathcal{S}) \sim (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim (0)$. Моментът на двоица в равновесие обаче е нулев, откъдето и следва, че не само главният вектор, но и главният момент \mathbf{M}_O на разглежданата система се анулират съгласно (12.3) и (11.6).

В другия възможен случай главният вектор и главният момент \mathbf{M}_O не са ортогонални, т. е.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0. \quad (12.11)$$

Пренасяме отново двоицата $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ успоредно на себе си, така че \mathbf{P}_1 да бъде приложена в полюса O , вж. фиг. 12.4 б). Нека $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{P}_1$, тогава

$$(\mathcal{S}) \sim (\mathbf{T}_1, \mathbf{P}_2) \sim (0).$$

Съгласно аксиома 9.2, ако две ненулеви сили са в равновесие, то те имат обща директриса, което очевидно е невъзможно, ако \mathbf{T}_1 и \mathbf{P}_2 са ненулеви, вж. отново фиг. 12.4б). Оттук $\mathbf{R} = \mathbf{M}_O = 0$ и теоремата е доказана.

Упражнение 12.1. Като ползвате разсъжденията от доказателството на теорема 12.2, покажете, че:

а) ако вторият инвариант на (пространствена) система сили (\mathcal{S}) е ненулев, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$, то системата се свежда до две „кръстосани“ сили (т. е. сили, чиито директриси са кръстосани прави в пространството);

б) в случая а) двете сили могат да се сведат до взаимно-перпендикулярни;

в) ако вторият инвариант на (пространствена) система сили се анулира, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$, то системата или има равнодействаща, или е еквивалентна на една двойца.

Да отбележим между другото, че твърдението а) принадлежи на Ойлер — доста преди Поансо той показва, че всяка система от сили може да се редуцира до две кръстосани сили. Ако двете сили се окажат успоредни или антиуспоредни, но с различна големина, системата има равнодействаща; ако те са равни и антиуспоредни — тя се свежда до една двойца. Поансо обаче е този, който построява системно и аксиоматично статиката, въвеждайки и понятието двойца. Това понятие не фигурира в трудовете на Ойлер.

Нека $Oxyz$ е декартова система с начало в полюса O . В проекции върху осите на тази система двете векторни уравнения за равновесие (12.6) се записват като шест скалярни, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0, \end{aligned} \quad (12.12)$$

където x_i , y_i и z_i са координатите на приложната точка A_i на силата \mathbf{F}_i , а F_{ix} , F_{iy} и F_{iz} са съответните проекции на тази сила върху осите на $Oxyz$, $i = 1, \dots, n$.

В често срещания на практика случай на равнинни системи сили (силите например „лежат“ в равнината Oxy) $F_{iz} = 0$, $i = 1, \dots, n$. Моментите на силите спрямо началото O са перпендикулярни на Oxy и имат ненулеви компоненти само по оста Oz . От шестте уравнения на равновесието (12.12) в този случай остават само три нетривиални, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Ако равнинната система е образувана от успоредни (например на оста Oy) сили, то уравненията на равновесие са само две:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i F_{iy} = 0, \quad (12.14)$$

тъй като в случая и $F_{ix} = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Упражнение 12.2. Нека \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 са две успоредни сили, а \mathbf{F} е тяхната равнодействаща. Тогава $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ се уравнива от силата $-\mathbf{F}$, т. е. системата $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, -\mathbf{F})$ е в равновесие. Като следствие от този факт изведете правилото на лоста (10.11) с помощта на (12.14).

Упражнение 12.3. Аналогично на предишното упражнение изведете (10.14), като предполагате, че силите \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 са антиуспоредни.

Упражнение 12.4 (теорема за трите момента). Покажете, че равнинна система от сили е в равновесие тогава и само тогава, когато главните ѝ моменти спрямо три неколинеарни точки се анулират едновременно.

Упътване: Използвайте (12.4).

Упражнение 12.5. Покажете, че равнинна система от сили е в равновесие тогава и само тогава, когато главните ѝ моменти спрямо две точки O_1 и O_2 се анулират заедно с проекцията на главния ѝ вектор върху отсечката O_1O_2 .

Упътване: Използвайте отново (12.4).

Съотношенията (12.6) (или (12.12) — (12.14) в компоненти) дават изчерпателен отговор на поставения в § 9.1 въпрос за явния вид на уравненията на равновесие на система сили, приложени към абсолютно твърдо

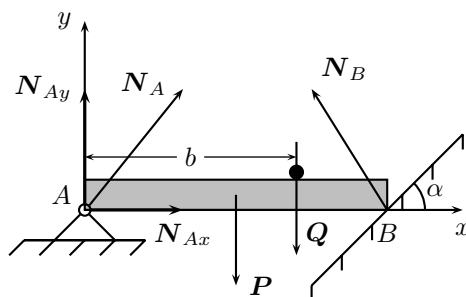
тяло. От проведенения дотук анализ се вижда, че техният извод изисква усилия и внимателен и подробен анализ. Естествено, читател с по-приложен вкус би могъл да пропусне всички аксиоми, леми, теореми и пр., които ни се наложи да въведем и докажем (и даже да ги обяви за математически „излишества“, меко казано), като използва направо уравненията на равновесието (12.6) за решаване на конкретни инженерни задачи. (Най-често срещаните подобни задачи са свързани с проектирането и оразмеряването на строителни конструкции и машинни елементи.) Подобен подход, разбира се, е оправдан и не е лишен от смисъл, ако конкретните задачи са, най-общо казано, стандартни и типични и за тяхното решаване съществуват класически „рецепти“. Ако задачите обаче са нестандартни или пък се търсят адекватни обобщения на даден модел, осмислянето на подводната част на „айсберга“ (вж. § 1.1), т. е. на методологията, вътрешната логика и начина на изграждане на модела, е *абсолютно необходимо*.

12.5. Два примера. Както вече споменахме в § 10.2, типичните задачи на статиката са свързани с определянето на неизвестните сили на реакциите в несвободно тяло, намиращо се в равновесие. Задача от този тип беше разгледана в пример 10.1, когато силите бяха сходящи. За илюстрация на уравненията (12.6) ще обсъдим първо една задача от същия тип, но за несходяща система, когато анулирането на главния момент е съществено условие за равновесие. Много подобни задачи могат да се намерят в учебниците и сборниците по аналитична, теоретична и строителна механика, например в ръководството на автора [7].

Пример 12.1. Да се определят реакциите в греда, закрепена ставно в края си A и опряна на гладка стена в другия си край B , вж. фиг. 12.5 и фиг. 3.5 а). Дължината на гредата е $2a$, теглото ѝ е P , а на разстояние b от края A на гредата е поставен товар с тегло Q .

Решение. Неизвестните реакции са N_A и N_B . При това N_B е перпендикулярна на подпиратата гладка стена, с което директрисата ѝ е определена — неизвестна е само големината ѝ. Неизвестни са обаче и двете проекции N_{Ax} и N_{Ay} на реакцията N_A по осите Ax и Ay , вж. фиг. 12.5, т. е. директрисата и големината на N_A . Следователно броят на неизвестните (три) *съвпада* с броя на уравненията на равновесие (12.13) (системата сили в случая е равнинна).

Проектираме векторното уравнение, изразяващо анулирането на главния вектор на системата $\mathbf{R} = \mathbf{N}_A + \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{N}_B$, върху осите Ax и Ay , за да получим съотношенията



Фиг. 12.5

$$\begin{aligned} N_{Ax} - N_B \sin \alpha &= 0, \\ N_{Ay} - P - Q + N_B \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Знаците „минус“ в (12.15) са следствие от факта, че съответните проекции на силите и реакциите, така както са изобразени на фиг. 12.5, са насочени в посоки, обратни на положителните посоки на съответните координатни оси.

Полюсът, спрямо който пресмятаме главния момент, можем да изберем произволно (тъй като главният вектор е нулев). Удобно е да вземем този полюс така, че възможно по-голям брой от моментите спрямо него на разглежданите сили да се анулират. В случая подходящ е изборът на ставата A , спрямо която условието $M_A = 0$ води до

$$-aP - bQ + N_B \cdot 2a \cos \alpha = 0. \quad (12.16)$$

Двата знака „минус“ се явяват тук, защото силите P и Q „въртят“ спрямо точката A в посока на движението на часовниковата стрелка, т. е. в отрицателна посока, вж. § 11.1.

Трите уравнения на равновесието (12.15) и (12.16) позволяват веднага да определим трите неизвестни реакции:

$$\begin{aligned} N_{Ax} &= \frac{aP + bQ}{2a} \operatorname{tg} \alpha, \\ N_{Ay} &= \frac{aP + (2a - b)Q}{2a}, \\ N_B &= \frac{aP + bQ}{2a \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Упражнение 12.6. Изведете (12.17), като използвате твърдението на упражнение 12.3 (пресмятайки моментите спрямо двата края на гредата A и B и проекцията на \mathbf{R} върху AB , т. е. върху оста Ax).

Пример 12.2 ([1]). Вторият пример представлява едно любопитно „доказателство“ на теоремата на Питагор като следствие от невъзможността да се построи вечен двигател. Разсъждението⁶ се базира върху уравненията на равновесие (12.6).

Да си представим газова бутилка с форма на правоъгълна призма. Височината на призмата е h , а основата ѝ представлява правоъгълен триъгълник ABC с катети a и b и с хипотенуза c , вж. фиг. 12.6. Запълваме призмата с газ под налягане p и я окачваме, както е показано на фиг. 12.6, така че тя може свободно да се върти около вертикалната ос Oz . В резултат на вътрешното налягане върху двете хоризонтални стени се появяват две равни и противоположно насочени сили (вертикални) с големина Sp , $S = \frac{1}{2}ab$. Те се уравниават взаимно и поради това се пренебрегват (вж. аксиома 9.3).

В точката на окачването O е приложена реакцията N_O . Теглото на бутилката с газа е P и то е насочено вертикално надолу.

Върху трите вертикални стени на призмата, отново в резултат на вътрешното налягане p , се появяват силите F_a , F_b и F_c — те са хоризонтални и големината им съответно е

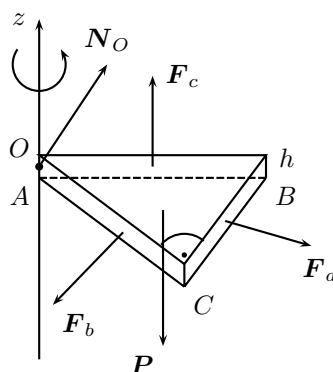
$$F_a = ahp, \quad F_b = bhp, \quad F_c = chp,$$

вж. фиг. 12.6. Силите са приложени в средите на съответните правоъгълни стени, така че рамената им спрямо точката O , $|AO| = h/2$, са съответно $a/2$, $b/2$ и $c/2$.

Системата от сили

$$(\mathcal{S}) = (F_a, F_b, F_c, N_O, P) \quad (12.18)$$

трябва да е в равновесие. Противното би означавало, че напълването на разглежданата призматична бутилка с газ под налягане е достатъчно да я накара да се върти около оста Oz без прилагането на каквито и



Фиг. 12.6. „Доказателство“ на теоремата на Питагор

⁶Разсъждението не претендира за каквато и да е математическа строгост, но това по никакъв начин не го лишава от интерес и очарование.

да е външни сили. Това обаче би превърнало бутилката във „вечен двигател“, „забранен“ от законите на физиката.

Щом системата от сили (12.18) е в равновесие, главният ѝ момент, в частност спрямо точката O , трябва да се анулира. Тогава се анулира и проекцията M_{Oz} на \mathbf{M}_O върху оста Oz :

$$\begin{aligned} M_{Oz} &= -F_a \cdot \frac{1}{2}a - F_b \cdot \frac{1}{2}b + F_c \cdot \frac{1}{2}c \\ &= \frac{1}{2}hp \left(-a^2 - b^2 + c^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

тъй като моментът на \mathbf{P} лежи в равнина, перпендикулярна на Oz , а $\text{mom}_O \mathbf{N}_O = 0$. Оттук $c^2 = a^2 + b^2$, с което теоремата на Питагор е „доказана“ като следствие от невъзможността за съществуване на вечния двигател.

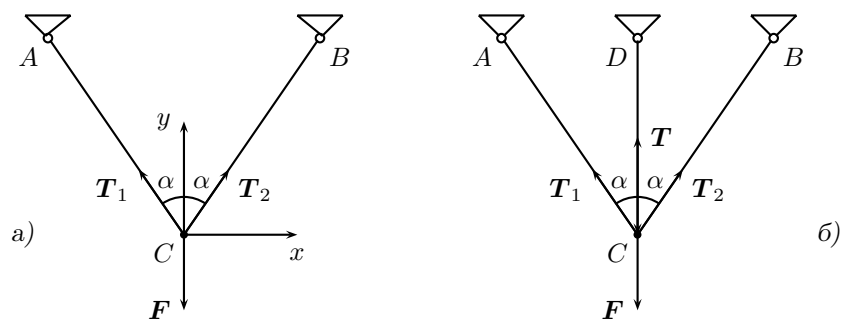
12.6. Статически-определими и статически-неопределими системи. В статиката на несвободните абсолютно твърди тела един от основните въпроси се състои, както вече споменахме, в определянето на неизвестните сили на реакциите, предполагайки, че телата са в равновесие. Броят на тези неизвестни зависи от броя и характера на наложените връзки. Съответната статическа задача може да се реши само ако броят на неизвестните не превишава броя на уравненията на статиката (т. е. шест в пространствения случай, вж. (12.12), три в равнинния случай, вж. (12.13), и два в случая на успоредни сили, вж. (12.14)). Таква задача се наричат *статически-определими*. Задачи, в които броят на уравненията на статиката не е достатъчен за определяне на неизвестните, се наричат *статически-неопределими*.

За илюстрация да се спрем на два най-прости примера. Разглеждаме първо два (безтегловни) пръта, ставно окачени в краищата им в неподвижните точки A и B и съединени помежду си, отново ставно, в точката C , вж. фиг. 12.7 а). Тази най-проста прътова система е натоварена със силата \mathbf{F} , приложена в точката C . Прътите са с еднакви дължини, симетрично разположени спрямо вертикалната ос y , по която е насочена и силата \mathbf{F} .

Неизвестните тук са големините на реакциите T_1 и T_2 в двата пръта. Определянето им с помощта на уравненията на статиката е елементарно. То се свежда да решаване на уравненията

$$\begin{aligned} -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha &= 0, \\ T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha - F &= 0, \end{aligned} \tag{12.19}$$

които следват от проектирането на векторното уравнение



Фиг. 12.7

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F} = 0$$

(анулирането на главния вектор \mathbf{R}) върху осите Cx и Cy . Да обърнем внимание, че знаците „минус“ в (12.19) отново са следствие на факта, че проекциите на съответните сили, така както са изобразени на фиг. 12.7 а), са насочени в посоки, противоположни на положителните посоки на съответните координатни оси. (Впрочем ние бихме могли да насочим реакциите и в противоположните посоки. В този случай в окончателните изрази за големините на реакциите ще се появят минуси. Това ще подсказва, че не сме отгатнали правилно посоката на реакцията.)

Решението на горните уравнения (12.19) е

$$T_1 = T_2 = \frac{F}{2 \cos \alpha}. \quad (12.20)$$

Ясно е, че разглежданата прътова система е статически-определима.

Да добавим сега, за по-голяма „надеждност“ на конструкцията, още един прът по средата, вж. фиг. 12.7 б). Това добавя още една неизвестна реакция T , с което неизвестните стават три. В същото време уравненията на статиката остават две (системата сили е отново сходяща). Следователно конструкцията на фиг. 12.7 б) е статически-неопределима.

На пръв поглед може да се стори, че наличието на статически-неопределими системи „компрометира“ цялата геометрична статика. Истината обаче е друга. В досегашните разглеждания навсякъде предполагахме, че телата са абсолютно твърди, което, разбира се, е *нереалистично* — всички реални тела са деформируеми в една или друга степен. Нещо повече, приложените към тях сили водят до т. нар. *вътрешни напрежения*, които причиняват *деформация*, т. е. изменение на взаимното положение

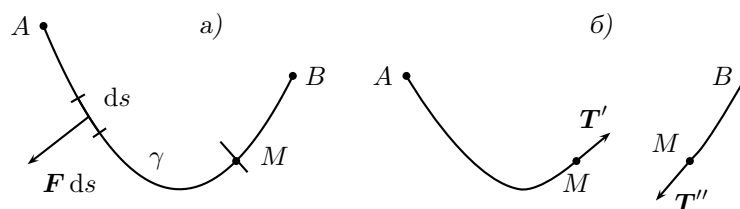
на точките от тялото. Тези деформации не могат да бъдат произволни. Например в прътовата конструкция на фиг. 12.7б) трите пръта трябва да се деформират „координирано“ помежду си, в смисъл че и след деформацията си трябва да остават съединени в ставата C . По-подробно този кръг въпроси ще бъде анализиран в § 15.1 след въвеждането на най-простия модел на деформируемо тяло — линейно-еластичния. Но преди това ще илюстрираме в следващия § 13 понятието *вътрешно напрежение*, като се спрем на класическата задача за верижната линия.

§ 13. Равновесие на нишка. Верижна линия

В заключение на тази глава ще разгледаме една красива класическа задача, поставена от Галилей. Наблюдавайки висящи въжета и вериги, Галилей се запитва коя е кривата, по която те се разполагат в равновесното си положение. Решението на тази задача, наречена днес *задача за верижката*, е дадено от Йоан Бернули през 1691 г., който използва идеи на неговия по-голям брат Якоб Бернули. То ще бъде изложено в настоящия параграф. В основата на решението са, разбира се, уравненията на статиката, приложени по подходящ начин към една континуална система (каквато е верижката), съчетани с идеята за вътрешните (опънни) напрежения. Тази идея на братята Бернули се оказва, независимо от (а може би благодарение на) простотата си, изключително плодотворна. Нейно очевидно обобщение, както ще видим по-нататък (§ 21.1), ще ни позволи да въведем понятието вектор на топлинния поток и с негова помощ да изведем уравнението на топлопроводността. Приложена по подходящ начин от Коши към едно деформируемо тяло, идеята на Бернули води на свой ред до понятието тензор на напрежението. Тук само ще споменем, че този тензор играе централна роля в механиката на непрекъснатите (деформируемите) среди.

13.1. Сили на опън в нишка. Разглеждаме равновесното положение на тънка нишка, окачена в неподвижните точки A и B , която лежи във вертикалната равнина. (Единствено за нагледност се ограничаваме с равнинния случай. Пространственият случай се разглежда напълно аналогично.)

Предполагаме, че нишката е *неразтеглива*. Това означава, че тя може да приема *произволни* форми в равнината, но разстоянието между всеки две точки от нишката, *мерено по нишката*, остава неизменно.



Фиг. 13.1. Вътрешни напрежения в нишката — илюстрация на метода на мислените сечения

Върху нишката са приложени външни сили, лежащи също във вертикалната равнина. Плътността на силите е \mathbf{F} , т.е. върху елемент от нишката с дължина ds действа сила $\mathbf{F} ds$. Под действието на тези сили тя ще заеме равновесно положение в равнината, „разполагайки“ се по предварително неизвестна крива γ , вж. фиг. 13.1 а).

Приложените сили водят до появата на *вътрешни (опънни) усилия* в нишката. Ако я разрежем мислено в произволна точка M , двете части ще останат в същото положение само ако към срязаните им краища приложим подходящи сили \mathbf{T} и $-\mathbf{T}$, вж. фиг. 13.1 б). Силите върху двата „бряга“ на разреза взаимно се урівновесяват:

$$\mathbf{T}' + \mathbf{T}'' = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{T}' = -\mathbf{T}'' = \mathbf{T}, \quad (13.1)$$

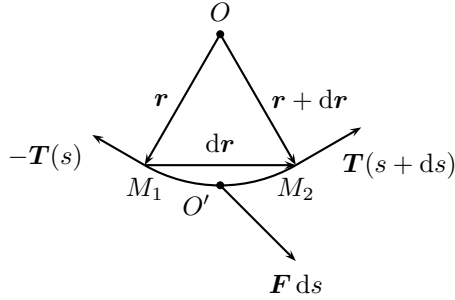
където \mathbf{T} е *опънната сила* в нишката⁷. Първото от равенствата в (13.1) означава, че тази сила ще се прояви само ако разрежем нишката. Второто от равенствата в (13.1) означава на свой ред, че ако върху левия „бряг“ на разреза действа опънната сила \mathbf{T} , върху десния „бряг“ ще действа силата $-\mathbf{T}$.

При равновесието на нишката положението на точката M може да се определи еднозначно с дъговата координата $s = \widetilde{AM}$, отчитана от една от крайните точки (избираме за определеност A). Големината на \mathbf{T} тогава зависи от s , т.е. $T = T(s)$, а посоката на \mathbf{T} съвпада с допирателната към нишката, както ще се убедим в § 13.2.

13.2. Уравнение на равновесието на нишка. И така, задачата за определяне на равновесната форма на нишката, т.е. на кривата γ , при зададените сили \mathbf{F} на пръв поглед се усложни — освен γ се намеси като неизвестна функция и опънната сила $\mathbf{T}(s)$. Но именно въвеждането на

⁷По-образно: представете си, че сте опънали ластик. Ако го разрежете, двете части ще се свият, ако не урівновесите вътрешните опънни напрежения.

тази нова неизвестна позволява да решим задачата и да намерим кривата γ , прилагайки уравненията на статиката.



Фиг. 13.2. Равновесие на безкрайно малка част $\widetilde{M_1M_2}$ от нишката

За целта забелязваме, че всяка част от нишката, колкото и малка да е тя, се намира в равновесие под действието на външните и на опънните сили.

Изрязваме безкрайно-малък елемент $\widetilde{M_1M_2}$ от нишката с дължина ds . Точката M_1 съответства на дъговата координата s ; тогава M_2 ще съответства на координатата $s + ds$. За да остане този елемент в равновесие, прилагаме съответните опънни сили (фиг. 13.2): $-\mathbf{T}(s)$ в точката M_1

(знак „минус“, тъй като M_1 е десен край на разреза) и $+\mathbf{T}(s + ds)$ в точката M_2 (знак „плюс“, тъй като M_2 е ляв край на разреза), вж. (13.1) и коментара след него в § 13.1. В „средата“ O' на $\widetilde{M_1M_2}$ е приложена външната сила $\mathbf{F} ds$. Под действието на тези три сили елементът $\widetilde{M_1M_2}$ от нишката е в равновесие. Следователно главният им вектор е нула:

$$\mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s) + \mathbf{F} ds = 0 \quad (13.2)$$

или

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{F} = 0, \quad (13.3)$$

забелязвайки, че $d\mathbf{T} = \mathbf{T}(s + ds) - \mathbf{T}(s)$ е диференциалът на функцията $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$.

От равновесието на силите, действащи върху $\widetilde{M_1M_2}$, следва впрочем, че опънатата сила \mathbf{T} е насочена по допирателна. За да покажем това, съставяме главния момент на силите, приложени към елемента $\widetilde{M_1M_2}$ спрямо полюс O :

$$\begin{aligned} & -\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s) + (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) \times \mathbf{T}(s + ds) \\ & + \left(\mathbf{r} + \frac{1}{2} d\mathbf{r} \right) \times \mathbf{F} ds = 0, \end{aligned} \quad (13.4)$$

вж. фиг. 13.2. Този момент естествено се анулира, щом дъгата $\widetilde{M_1M_2}$ е в равновесие.

Записваме (13.4) във вида

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \left[-\mathbf{T}(s) + \mathbf{T}(s + ds) + \mathbf{F} ds \right] \\ + d\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s + ds) + \frac{1}{2} \underline{d\mathbf{r} \times \mathbf{F} ds} = 0. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Членът в квадратната скоба се анулира вследствие на уравнението на равновесието (13.2). Подчертаният член в (13.5) може да се пренебрегне като безкрайно-малка величина от по-висок ред спрямо $|ds|$. (Забележете, че $|d\mathbf{r}| = |ds|$.) Следователно

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s + ds) = 0. \quad (13.6)$$

Използваме уравнението на равновесието (13.2) в (13.6):

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s + ds) &= d\mathbf{r} \times \left[\mathbf{T}(s) - \mathbf{F} ds \right] \\ &= d\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s) - \underline{d\mathbf{r} \times \mathbf{F} ds} = 0. \end{aligned}$$

Подчертаният член отново представлява безкрайно-малка величина от по-висок ред спрямо $|ds|$ и може да се пренебрегне в последното уравнение. Това ни води до

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{T}(s) = 0$$

или

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{T}(s) = 0. \quad (13.7)$$

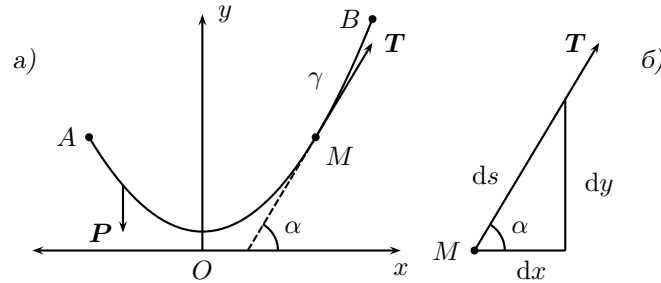
Но $\boldsymbol{\tau}^0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ е единичният вектор на допирателната към кривата γ . Равенството (13.7) тогава означава, че $\mathbf{T}(s)$ е колинеарно с $\boldsymbol{\tau}^0$, т. е. опънното усилие във всяка точка от равновесното положение на нишката γ е насочено по допирателната към кривата γ .

Упражнение 13.1. Изведете формулата (13.7) по един по-прост начин, като анулирате главния момент на силите, действащи върху елемента $M_1 M_2$, спрямо десния му край M_2 .

Уравнението на равновесие (13.3), комбинирано с току-що установения факт за посоката на опънните сили при равновесие на нишката, позволява да намерим и кривата γ , и усилията $\mathbf{T}(s)$.

За тази цел проектираме уравненията (13.3) върху осите Ox и Oy на декартова система Oxy в равнината на нишката:

$$\frac{dT_x}{ds} + F_x = 0, \quad \frac{dT_y}{ds} + F_y = 0, \quad (13.8)$$



Фиг. 13.3

вж. фиг. 13.3 а).

Щом $\mathbf{T}(s)$ е насочено по допирателната към нишката, то

$$T_x = T \cos \alpha, \quad T_y = T \sin \alpha,$$

където $T = |\mathbf{T}|$ е големината на опънната сила, а α е ъгълът, който допирателната сключва с оста Ox , вж. фиг. 13.3 а). От друга страна,

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds},$$

както се вижда от фиг. 13.3 б). Следователно

$$T_x = \frac{dx}{ds} T, \quad T_y = \frac{dy}{ds} T.$$

Заместването на тези съотношения в (13.8) води до

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + F_x = 0, \quad (13.9)$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + F_y = 0. \quad (13.10)$$

Неизвестните тук са функциите

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad T = T(s). \quad (13.11)$$

За тяхното определяне добавяме към (13.9) и (13.10) очевидното условие

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1, \quad (13.12)$$

което, нека подчертаем, всъщност е условието за неразтегливост на нишката.

Съотношенията (13.9), (13.10) и (13.12) образуват нелинейна система от три обикновени диференциални уравнения (две от втори, едно от първи ред) за трите неизвестни функции (13.11). Тази система може да се реши явно само в някои частни случаи (вж. § 13.3). Общото решение, ако може изобщо да се намери, ще съдържа пет произволни константи. Те се определят чрез известните координати на точките на окачване A и B :

$$\begin{aligned}x(0) &= x_A, & y(0) &= y_A, \\x(L) &= x_B, & y(L) &= y_B\end{aligned}\tag{13.13}$$

и известната дължина L на нишката. Тук (x_A, y_A) и (x_B, y_B) са съответно декартовите координати на точките A и B . Забележете, че (13.13) не са познатите условия на Коши от курса по обикновени диференциални уравнения за системата (13.9), (13.10) и (13.12). Това са *гранични условия* (тъй като те определят стойностите на неизвестните функции $x(s)$ и $y(s)$ върху границите $s = 0$, $s = L$ на дефиниционната им област $s \in (0, L)$).

13.3. Верижна линия. В този най-прост случай силата $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ е специфичното тегло на нишката, т. е.

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho g,\tag{13.14}$$

където ρ е плътността на нишката, а g — земното ускорение. Нека $y = y(x)$ е уравнението на търсената верижна линия и нека $x = x_0$ е абсцисата на най-ниската ѝ точка. Пренасяме началото O на координатната система Oxy така, че оста Oy да минава през тази точка. С други думи, осъществяваме трансляцията

$$x \longrightarrow x - x_0\tag{13.15}$$

така, че

$$y'(x) \Big|_{x=0} = 0,\tag{13.16}$$

вж. фиг. 13.3а). Забележете обаче, че най-ниската точка на верижката не е предварително известна. Тя представлява една от интеграционните константи на съответната система от диференциални уравнения. Като такава тя ще се определи с помощта на зададените координати на точките на окачване и дължината на верижката (вж. края на този параграф и по-специално системата (13.22)).

Заместваме изразите (13.14) в уравнения на равновесие (13.9) и (13.10) и получаваме системата диференциални уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) - \rho g &= 0. \end{aligned} \quad (13.17)$$

От първото уравнение (13.17) следва, че

$$T_x = T \frac{dx}{ds} = T_0, \quad T_0 = \text{const}, \quad (13.18)$$

което означава, че компонентата на опънната сила по оста Ox е постоянна. (Това е следствие от факта, че действащата сила (в случая, теглото) е вертикална и компонентата ѝ по тази ос се анулира, вж. (13.8).)

Съотношението (13.18) позволява да изключим големината T на опънната сила от системата (13.17). Наистина това съотношение дава

$$T = T_0 \frac{ds}{dx},$$

което заместваме във второто уравнение на (13.17). След съкращаване на ds намираме

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} = \frac{\rho g}{T_0}. \quad (13.19)$$

Означаваме $p = dy/dx$, тогава (13.19) се преписва като $dp = ds/a$. Но $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Следователно

$$dp = \frac{ds}{a} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{a} dx, \quad (13.20)$$

което представлява диференциално уравнение с разделящи се променливи спрямо функцията $p = p(x)$. Интегрирането на (13.20) е очевидно и води до

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} &= \frac{x}{a}, \\ \ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) &= \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Интеграционната константа тук се анулира, $C = 0$, предвид избора на координатната система Oxy , вж. (13.16). Тогава

$$\sqrt{1 + p^2} + p = e^{x/a}.$$

Оттук

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p} = \sqrt{1+p^2} - p = e^{x/a}.$$

След изваждане на последните две уравнения намираме

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}, \quad y = a \cosh \frac{x}{a} + b,$$

което и представлява уравнението на верижната линия в транслираната координатна система, вж. (13.15). В изходната координатна система това уравнение има следния окончателен общ вид:

$$y = a \cosh \frac{x-x_0}{a} + b, \quad (13.21)$$

където a , b и x_0 са интеграционни константи.

Както и в общия случай (§ 13.2), определянето на интеграционни константи се осъществява с помощта на известните координати (x_A, y_A) , (x_B, y_B) и на зададената дължина на нишката. Това води до системата

$$\begin{aligned} y_A &= a \cosh \frac{x_A - x_0}{a} + b, \\ y_B &= a \cosh \frac{x_B - x_0}{a} + b, \\ L &= a \left(\sinh \frac{x_B - x_0}{a} - \sinh \frac{x_A - x_0}{a} \right), \end{aligned} \quad (13.22)$$

вж. (13.21). Поясняваме формулата за L в последния ред на (13.22):

$$\begin{aligned} L &= \int_{AM} ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+y'(x)^2} dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+p^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} \cosh \frac{x-x_0}{a} dx \\ &= a \left(\sinh \frac{x_B - x_0}{a} - \sinh \frac{x_A - x_0}{a} \right), \end{aligned}$$

използвайки (13.21) и известните свойства на хиперболичните функции.

Упражнение 13.2. Опитайте се да решите системата (13.22) и да начертаете верижната линия при конкретни данни, например точки на окачване $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$ и дължина $L = 4$.

Упражнение 13.3. Да предположим, че $F_x = 0$, $F_y = -\gamma dx$. (Подобно натоварване е характерно за висящите мостове.) Покажете, че равновесната форма на нишката в този случай е парабола.

Упражнение 13.4. Как ще изглеждат уравнения на равновесие в случая, когато тежка верига виси окачена само в единия си край и към нея е приложена постоянна хоризонтална сила (образно казано, духавятър).

Глава 4

НАЙ-ПРОСТИ МОДЕЛИ НА ДЕФОРМИРУЕМИ ТЕЛА

Изследването на равновесието на телата, проведено в глава 3 с помощта на геометричната статика, демонстрира ограничеността на модела на абсолютно твърдото тяло и необходимостта от отчитане на деформируемостта на телата (вж. примера в § 12.6). Тази необходимост е ясна впрочем и сама по себе си, тъй като абсолютно твърди тела не съществуват.

Практическият опит ни учи, че едва ли е възможно построяването на универсален модел на деформирането на телата под въздействието на приложения към тях сили. Най-простият начин да се убедим в това, е да пуснем върху под метално топче, капка вода и например топче от пластелин. При удара в пода тези материали ще се деформират, но поведението им при деформирането очевидно ще бъде коренно различно. Металното топче ще отскочи, практически без да измени формата си предвид своята *еластичност*. Капката вода ще се разлее по пода, тъй като водата е *флуид*. Пластелиновото топче ще се залепи за пода и ще измени забележимо формата си: неговата деформация е *нееластична*, като комбинира в себе си особености на деформирането, характерни и за еластично тяло, и за флуид.

В тази глава ще разгледаме класическите модели, описващи закономерностите на деформирането на трите типа тела, споменати по-горе: металното топче, капката вода и пластелиновото топче. Ще започнем с двата основни модела, тези на твърдото еластично тяло и на вискозната течност (флуида). По-специално внимание ще отделим на модела на еластичното тяло, тъй като той допуска разглеждане с достатъчно елементарни средства. Ще покажем, в частност, как известният закон на Хук, комбиниран с идеята за вътрешните напрежения и с втория закон на Нютон, позволява да моделираме надлъжните трептения на еластичен прът с помощта на най-просто диференциално уравнение (включва-

що обаче частни производни на неизвестните функции).

От своя страна разнообразното комбиниране на еластичния и вискозния модел води до значително по-сложни и по-интересни обобщения, в които телата вече са нееластични и, по-точно, *вискозоеластични*. Като такива те проявяват едновременно свойства и на твърдо еластично тяло, и на вискозна течност.

§ 14. Модел на еластично тяло. Закон на Хук

14.1. Модел на еластично тяло. Да разгледаме прав прът с дължина l_0 и кръгово напречно сечение S . Прилагаме към пръта двойката опънни сили \mathbf{T} и $-\mathbf{T}$, както е показано на фиг. 14.1, т. е. разглеждаме т. нар. *едноосен опън*. Въвеждаме вектора на (*опънното*) *напрежение*

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{T}}{S}, \quad (14.1)$$

действащо върху долния край на пръта. Той очевидно е колинеарен с \mathbf{T} , а големината му σ е опънната сила, действаща върху единица лице от напречното сечение.

Аналогично, в горния край на пръта се появява векторът на опънното напрежение $-\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{T}/S$. Очевидно опънните напрежения в двата края на пръта имат обща директриса (оста на пръта), равни са по големина и са противоположно насочени. Размерността на напрежението (по-точно, на неговата големина σ) е „сила върху лице“:

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}, \quad (14.2)$$

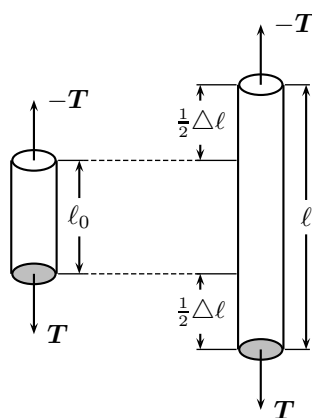
в CGS-системата или просто kG/cm^2 в техническата система.

Под действието на опънните сили \mathbf{T} и $-\mathbf{T}$ прътът се деформира и дължината му от l_0 нараства до ℓ , вж. фиг. 14.1. Абсолютното удължение на пръта е съответно $\Delta\ell = \ell - l_0$. Безразмерната величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{l_0} = \frac{\ell - l_0}{l_0} \quad (14.3)$$

се нарича *деформация*. Тя характеризира абсолютното удължение на единица дължина от пръта.

Да обърнем внимание, че когато деформацията ε е достатъчно голяма, естествено е да очакваме, че напречното сечение S на пръта няма



Фиг. 14.1

да остане постоянно, а ще намалее (прътът ще стане по-тънък). Това ще доведе съгласно (14.1) (т. е. по чисто геометрични причини) до увеличаването на напрежението σ при неизменна сила T . Тъй като навсякъде по-нататък деформациите ще се предполагат малки, $|\varepsilon| \ll 1$, този ефект ще се пренебрегва, като напречното сечение S ще се предполага *неизменно* в процеса на деформирането на пръта.

В разглежданото тяло (прът при едноосен опън) параметрите на състоянието са два — напрежението σ и деформацията ε . Математическият модел на деформируемия прът ще формулираме, конкретизирайки общото съотношение (1.2). В случая то има вида

$$f(t, \sigma, \varepsilon, \dots) = 0. \quad (14.4)$$

Многообразието в (14.4) включва производни по времето на параметрите на състоянието σ и ε , интеграли, в които участват σ и ε , и т. н. До общи модели от такъв тип ще достигнем в § 18 при обсъждането на вискозо-еластичното поведение на телата.

Да започнем с разглеждането на най-простия случай, когато (14.4) съдържа само σ и ε , като ги свързва при това линейно, т. е.

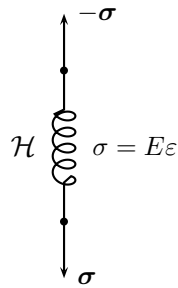
$$\sigma = E\varepsilon. \quad (14.5)$$

Съотношението (14.5) е характерно за модела на *линейно-еластичното*, или *хуковото* тяло. Самото съотношение (14.5) е известно като *закон на Хук* (при опънно натоварване). В модела на еластичното тяло има обаче и още едно изискване от типа на (14.5), което ще въведем и обсъдим в § 14.2.

Коефициентът E в (14.5) се нарича *модул на Юнг* на материала и представлява основен материален параметър на разглежданата система (линейно-еластичен прът при едноосен опън). Тъй като деформацията ε е безразмерна, то размерността на E съвпада с тази на напрежението:

$$[E] = [\sigma] = ML^{-1}T^{-2},$$

в CGS-системата, вж. (14.2), или просто kG/cm^2 в техническата система.



Фиг. 14.2. „Пружинка“ на Хук

Интерпретацията на модула на Юнг E е очевидна от (14.5): това е силата, която трябва да се приложи към прът с единично напречно сечение (например, 1 cm^2), за да удвоим дължината му. (За стандартна стомана например модулът на Юнг е $2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$.) Колкото е по-голямо E , толкова „по-кораво“ е тялото, в смисъл че трябва да се приложи по-голямо напрежение за реализирането на зададена деформация. Ако $E = \infty$, тялото е абсолютно твърдо (недеформируемо) при опън.

Тялото на Хук може да се онагледява с помощта на модел, представляващ пружинка под действието на напрежение, вж. фиг. 14.2. Сравнението е подходящо, тъй като пружината очевидно е еластично тяло. Това е факт, установен експериментално от самия Хук — той е окачвал различни по тежест товари върху пружини и е измервал удължението им. Резултатите от измерванията Хук е резюмирал с думите „каквато е силата, толкова е и удължението“, т.е. силата и удължението на пружината са пропорционални, което очевидно съвпада със закона (14.5). (Тъй като удължението $\Delta\ell$ е пропорционално на деформацията ε , вж. (14.3), а опънатата сила е пропорционална на напрежението σ , вж. (14.1).)

Моделът на Хук ще означаваме, в чест на Хук, с \mathcal{H} . Това е първият от двата основни идеализирани модела, които ще използваме по-нататък (§ 18) при обсъждане на по-сложните закони на поведение на твърдите деформируеми тела.

14.2. Чисто срязване в еластично тяло. Да напомним, че модулът на Юнг се появи в § 14.1 при разглеждането на едноосен опън на цилиндричен образец, изрязан от еластично тяло. По същата логика можем обаче да изрежем от тялото и образци с друга форма, като

разгледаме тяхната деформация не само при чист опън.

Например да изрежем тънка квадратна пластината със страна a и дебелина h . Прилагаме към горната и долната стена на пластината дволицата сили $(\mathbf{T}, -\mathbf{T})$. (Това може да се осъществи например, като запоим долния и горния край на пластината към два абсолютно твърди (по-точно, много по-корави от нея) пръта, към чиито краища да приложим равни по големина и противоположно насочени успоредни сили, вж. фиг. 14.3.) Такова натоварване се нарича *чисто срязване*¹ или *чисто хлъзгане* (тъй като горната страна на пластината се „хлъзга“ спрямо долната).

Силите \mathbf{T} и $-\mathbf{T}$ пораждат съответно напреженията

$$\tau = \frac{\mathbf{T}}{S} \quad \text{и} \quad -\tau = -\frac{\mathbf{T}}{S},$$

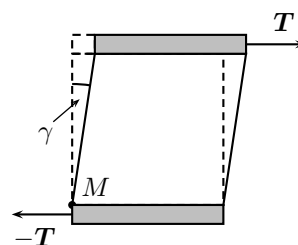
чиято големина е $\tau = T/S$. Тук $S = ah$ е лицето на напречното сечение на пластината. Напреженията $\pm\tau$ се наричат *срязващи* или *хлъзгащи* (или още *тангенциални*). Използваме тук означението $\pm\tau$ за тези напрежения, за да подчертаем отликата им от опънните напрежения, разгледани в § 14.1.

Срязващите напрежения водят до *ъглова* или *срязваща деформация* на разглеждания образец: от квадрат той се превръща в ромб, а ъгълът при върха M , който първоначално е бил 90° , след деформацията е вече $90^\circ - \gamma$, вж. фиг. 14.3. Ъгълът γ характеризира *ъгловата деформация*. Този ъгъл е аналогът на опънната деформация ε , въведена в (14.3) при опънно натоварване. Аналогията е естествено да се разшири, като предположим, както и при едноосния опън, че срязващото напрежение е пропорционално на срязващата (ъглова) деформация:

$$\tau = \mu\gamma. \quad (14.6)$$

Това съотношение, заедно със закона на Хук (14.5), дефинира модела на *линейно-еластичното тяло* или просто *еластичното тяло*. С други думи, еластичното тяло се характеризира с това, че съответните напрежения

¹Терминът *срязване* е свързан с факта, че разглежданото натоварване се реализира между двете рамена на ножица в процеса на рязането — опитайте се да си го представите.



Фиг. 14.3

и деформации са пропорционални както при едноосен опън, така и при чисто срязване. (Забележете, че (14.6) е точният аналог на закона (14.5), но в случая на срязващи напрежения. В тази връзка можем да перефразираме знаменитата формулировка на Хук: „каквата е срязващата сила, такава е и срязващата деформация“, вж. края на § 14.1, за да изразим закона (14.6).)

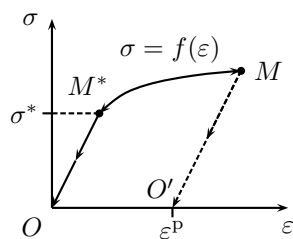
Коефициентът μ в (14.6) се нарича *модул* или *коэффициент на срязване*. В техническата литература той се бележи най-често с G .

Модулът на Юнг E и коефициентът на срязване μ са два независими материални параметъра на еластичното тяло. В теорията на еластичността се показва, че ако тялото е изотропно, то E и μ са достатъчни за пълното описание на еластичните свойства. Да поясним, че под изотропност се разбира независимостта на свойствата на разглеждания материал от направлението. В еластичен контекст например това означава, че каквато и да е ориентацията на изрязаните от тялото цилиндрични образци или квадратни пластини, модулите E и μ ще бъдат едни и същи при съответните натоварвания (опън или срязване).

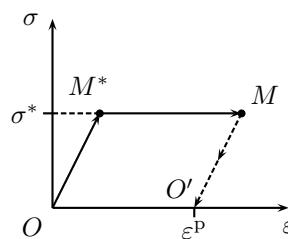
14.3. Забележка относно нелинейно-еластичните и пластичните тела. Еластичното тяло е „универсален“ модел на твърдите деформируеми тела при достатъчно малки напрежения (и съответно деформации). По-точно, всяко тяло в началото на деформирането си се подчинява както на закона на Хук (14.5), така и на неговия „събрат“ (14.6). При увеличаване на натоварването връзката между напреженията и деформациите престава да е линейна, както схематично е показано на фиг. 14.4 за примера на опънните напрежения. Напрежението σ^* , след което нелинейността става съществена, се нарича *граница на пропорционалност* или *граница на еластичност*. Законът на Хук (14.5) се заменя с по-общата зависимост $\sigma = f(\varepsilon)$, където f е монотонно-растяща функция², характерна за даденото тяло и описваща т. нар. *крива на натоварване*.

Казаното по-горе важи за всички твърди деформируеми тела при натоварване. Има обаче принципна разлика в поведението на различните материали при *разтоварване*, когато след достигане на точката $M(\varepsilon, \sigma)$ върху диаграмата „деформация-напрежение“ намаляваме постепенно натоварването, докато то не изчезне, $\sigma = 0$. На фиг. 14.4 нато-

²При предположението, че скоростите на изменение на напрежението, $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$, и на деформацията, $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$, са пренебрежимо малки. Ако това условие не е изпълнено, то $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$ могат да участват явно в уравнението на модела (14.4). В това ще се убедим при изучаването на най-простите модели на вискозо-еластични тела в § 18.



Фиг. 14.4



Фиг. 14.5

варването и разтоварването са илюстрирани чрез съответните стрелки.

В зависимост от поведението при разтоварване материалите могат да се разделят на два класа.

В единия клас кривата на разтоварване съвпада с тази на натоварването. Премахването на напрежението премахва и деформацията, т. е. при $\sigma = 0$ тялото се връща в изходното си недеформирано състояние, $\varepsilon = 0$. Такива материали се наричат *нелинейно-еластични* или *просто еластични*, тъй като еластичността, най-общо, се характеризира с обратимост на процесите на деформация (илюстрирано по-горе със съвпадането на кривите на натоварване и разтоварване). Примери за такива материали са полимерите, например ластикът (при условие че скоростите на напрежение и деформация са много малки, т. е. процесите на натоварване и разтоварване са много бавни).

Във втория клас материали разтоварването се извършва по отсечката MO' , практически успоредна на отсечката OM^* , съответстваща на първоначалното линейно-еластично деформиране на пръта. Това означава, че при пълното разтоварване на образца ($\sigma = 0$) деформацията в него *не изчезва*. Появява се т. нар. *остатъчна* или *пластична деформация ε^P , вж. фиг. 14.4. В този случай процесът на деформиране е *необратим*, в смисъл че кривите на натоварване и разтоварване *не съвпадат* за разлика от еластичното тяло. Подобно поведение е характерно за металите по причини, които тук няма да коментираме.*

Да отбележим, че за редица метали (например олово, мед, меко желязо, различни видове стомани и др.) кривата на натоварването, след достигане на границата на еластичност σ^* , е практически хоризонтална, вж. фиг. 14.5. С други думи, тези метали започват да се деформират (образно казано, да „текат“) при практически неизменна големина на напрежението $\sigma = \sigma^*$. Това явление се нарича *пластично течение*, а диаграмата „деформация-напрежение“, показана на фиг. 14.5, характеризира *идеалния еласто-пластичен материал*. Неговото изучаване представлява

съществен технологичен интерес и е предмет на математическата теория на пластичността.

Казаното дотук илюстрира, по най-краткия възможен начин, изключителното разнообразие в поведението на твърдите деформируеми тела и „намеква“ за големите трудности, възникващи в процеса на тяхното моделиране и математическо изследване. Едно по-детайлно обсъждане, разбира се, излиза далеч извън рамките на настоящия курс. Заинтересованият читател може да намери грамадно количество допълнителна информация в литературата по механика на деформируемото тяло и теория на пластичността, например в книгите [9, 10].

§ 15. Най-прости приложения на закона на Хук

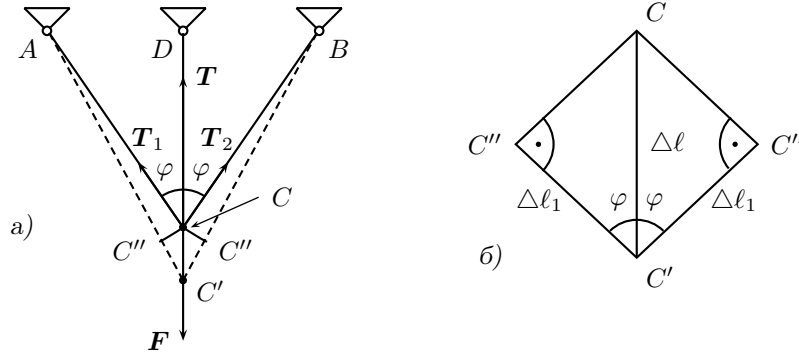
15.1. Приложение на закона на Хук за решаване на статически-неопределими задачи. Отчитането на деформируемостта на телата в рамките на закона на Хук (14.5) позволява решаването на редица статически-неопределими задачи, свързани с натоварени прътови системи. Основната идея е „съвместимостта“ на деформациите във възлите, където се съединяват повече от два пръта. За илюстрация ще разгледаме по-подробно най-простия пример на трипрътовата система от § 12.6, вж. фиг. 12.7б) и фиг. 15.1 а).

Предполагаме за простота, че точката D разполовява отсечката AB , прътите AC и BC имат еднаква дължина l_1 , а l е дължината на пръта DC . Всички пръти имат еднакво напречно сечение S . Неизвестни в случая са големините на трите реакции в прътите T_1 , T_2 и T . Уравненията на статиката ни дават двете вече познати съотношения, вж. § 12.6:

$$\begin{aligned} -T_1 \sin \varphi + T_2 \sin \varphi &= 0, \quad \text{т. е.} \quad T_1 = T_2, \\ 2T_1 \cos \varphi + T &= F. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Допълнителното уравнение за неизвестните усилия следва от разглеждането на съвместното деформиране на прътите. Очевидно тези деформации в случая *не могат* да бъдат произволни, тъй като прътите и след прилагането на силата \mathbf{F} трябва да са съединени в общата става C . С други думи, конструкцията *не може да се разчлени*, т. е. да се разруши в тази става.

За да изразим това изискване аналитично, нека означим с C' точката, в която се е преместила ставата C в резултат на деформацията след



Фиг. 15.1

прилагане на силата \mathbf{F} . Тогава удължението на пръта DC е $\Delta l = |CC'|$ и е насочено по вертикалата (както и силата \mathbf{F}), а удължението на прътите AC и BC е $\Delta l_1 = \Delta l_2 = |C'C''|$. (Тези удължения са равни предвид симетрията на разглежданата конструкция.) Тъй като деформацията е малка, то преместването на ставата C спрямо точката A (и аналогично спрямо B) можем да си представим като много малко завъртане около тези точки с последващо удължение $\Delta l_1 = \Delta l_2$ на двата пръта, вж. фиг. 15.1 а). Но щом завъртането е много малко, то дъгата CC'' може да се замени със съответната хорда, а $\angle DC'B \approx \angle DCB = \varphi$, вж. фиг. 15.1 б). Следователно

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \varphi.$$

Оттук

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l}{l_1} \cos \varphi = \frac{\Delta l}{l} \frac{l}{l_1} \cos \varphi = \varepsilon \frac{l}{l_1} \cos \varphi$$

и тъй като $l = l_1 \cos \varphi$, то

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos^2 \varphi. \tag{15.2}$$

Връзката (15.2) между ε и ε_1 изразява споменатата „съвместимост“ на деформациите, т.е. изискването, че разглежданата конструкция *не се разчленява* в ставата C при деформирането си.

Да предположим за простота, че всички пръти в системата имат не само еднакво напречно сечение S , но и един и същ модул на Юнг E . Опънното напрежение в прътите тогава е

$$\sigma = \frac{T}{S} = E\varepsilon, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{T_1}{S} = E\varepsilon_1,$$

т. е.

$$\varepsilon = \frac{T}{SE}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{T_1}{SE}.$$

Заместваме тези изрази за ε и ε_1 в (15.2):

$$\frac{T_1}{SE} = \frac{T}{SE} \cos^2 \varphi, \quad \text{т. е.} \quad T_1 = T_2 = T \cos^2 \varphi,$$

което, заедно с (15.1), позволява веднага да намерим търсените опънни сили в прътите:

$$T = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \varphi}, \quad T_1 = T_2 = \frac{F \cos^2 \varphi}{1 + 2 \cos^3 \varphi}.$$

По аналогичен начин, разглеждайки съвместимостта на деформациите във всеки отделен възел, можем да определим напреженията и в значително по-сложни прътови системи.

15.2. Температурни напрежения в прътови системи. Добре известно е, че телата, в частност металите, при нагряване се разширяват. Например, ако повишим с θ температурата на куб със страна ℓ и обем $V = \ell^3$, то страната му ще стане $\ell' = \ell(1 + \beta\theta)$, а обемът

$$V' = \ell'^3 = \ell(1 + \beta\theta)^3 \approx (1 + 3\beta\theta)V.$$

Тук използвахме факта, че $\beta \ll 1$. Следователно обемната деформация, дефинирана аналогично на (14.3), ще бъде

$$\frac{V' - V}{V} = \alpha\theta, \quad \alpha = 3\beta.$$

Коефициентът α се нарича *коефициент на температурно разширение*.

Да разгледаме сега прав прът с дължина ℓ . След повишаване на температурата с θ дължината му ще се увеличи с $\Delta\ell = \beta\theta\ell$, $\beta > 0$, така че прътът ще придобие деформацията

$$\varepsilon^t = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \beta\theta. \quad (15.3)$$

Индексът 't' тук означава, че ε^t е следствие *единствено* на температурната промяна. Разбира се, при нагряването ще се увеличи и напречното сечение на пръта, но то може да се пренебрегне в разсъжденията по-нататък поради вече споменатия факт, че $\beta \ll 1$.

Деформацията ε^t ще се реализира обаче само ако прътът е свободен. Ако той е част от конструкция, останалите елементи ще възпрепятстват

температурното удължение или свиване. В резултат в конструкцията ще се появят т. нар. *температурни напрежения и деформации* даже при отсъствие на външно механично натоварване.

За да илюстрираме този важен за инженерната практика ефект, нека разгледаме отново пръговата конструкция, показана на фиг. 15.1 а). Външни сили сега няма, но централният прът е нагрят, така че температурата му се е повишила с θ . Като следствие той би се удължил, съгласно закона (15.3), ако беше свободен. Той обаче е „вързан“ за двата странични пръта, които ще възпрепятстват това удължение с оглед да не се допусне разчленяване на конструкцията в общата става C . Това ще доведе до появата освен на чисто температурната деформация (15.3) и на допълнителна еластична деформация ε^e , така че пълната деформация на централния прът ще бъде

$$\varepsilon = \varepsilon^t + \varepsilon^e = \beta\theta + \varepsilon^e. \quad (15.4)$$

Съответно и в двата странични пръта ще се появят еластични деформации

$$\varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e$$

в резултат от „придърпването“ им от страна на централния прът.

Деформациите ε и ε_1^e трябва да бъдат съвместими, в смисъл че трябва да е изпълнено условието (15.2):

$$\varepsilon_1^e = (\beta\theta + \varepsilon^e) \cos^2 \varphi, \quad (15.5)$$

вж. (15.4). Освен това еластичните напрежения

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1^e, \quad \sigma = E\varepsilon^e$$

в трите пръта трябва да бъдат в равновесие:

$$2\varepsilon_1 \cos \varphi + \varepsilon = 0, \quad (15.6)$$

вж. (15.1). (Предполагаме отново, че прътите имат един и същ модул на Юнг и еднакво напречно сечение.)

С помощта на (15.5) и (15.6) определяме деформациите ε^e и ε_1^e в прътите:

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= -\frac{2\beta\theta \cos^3 \varphi}{1 + 2 \cos^3 \varphi}, \\ \varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e &= \frac{\beta\theta \cos^2 \varphi}{1 + 2 \cos^3 \varphi}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Знаците в (15.7) показват, че при $\theta > 0$ еластичната деформация ще свие централния прът (за да се компенсира температурното удължение), а двата странични пръта за сметка на това ще се удължат (което е интуитивно ясно).

По подобен начин се определят температурните деформации и напрежения в разглежданата система и в случая, когато температурата на всички пръти е изменена с θ , но коефициентите на термично удължение на прътите е различна: β за централния и $\beta_1 = \beta_2$ за двата странични. В този случай пълната деформация в прътите е

$$\varepsilon = \beta\theta + \varepsilon^e, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \beta_1\theta + \varepsilon_1^e.$$

Условието (15.2) за съвместимостта е

$$\beta_1\theta + \varepsilon_1^e = (\beta\theta + \varepsilon^e) \cos^2 \varphi. \quad (15.8)$$

Тук ε^e и $\varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e$ са еластичните деформации, които ще се появят в прътите, за да „компенсират“ несъвместимостта на измененията на дължините в резултат на чисто температурното им удължение или свиване съгласно закона (15.3).

Добавянето на условието (15.6) за равновесие на системата към (15.8) позволява да намерим температурните деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= -\frac{2\theta \cos \varphi (\beta \cos^2 \varphi - \beta_1)}{1 + 2 \cos^3 \varphi}, \\ \varepsilon_1^e = \varepsilon_2^e &= \frac{\theta (\beta \cos^2 \varphi - \beta_1)}{1 + 2 \cos^3 \varphi}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Любопитно е, че ако е изпълнено условието

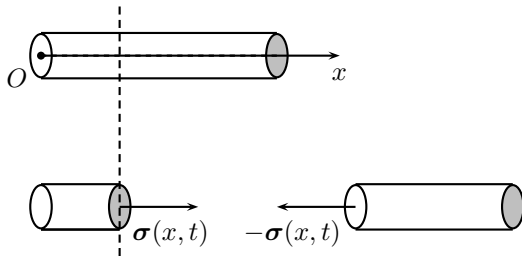
$$\cos^2 \varphi = \frac{\beta_1}{\beta},$$

то температурни напрежения и деформации в системата няма. Причината е ясна: чисто температурните деформации на прътите в този случай удовлетворяват условията за съвместимост (15.2) и поради това не се налага да ги „коригираме“ с подходящи еластични „добавки“.

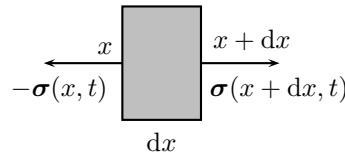
§ 16. Надлъжни трептения на еластичен прът: вълново уравнение. Решение на Даламбер

Целта ни в този параграф е да покажем по какъв начин законът на Хук, комбиниран с идеята за вътрешните напрежения и втория закон на Нютон, позволява да опишем надлъжните трептения на еластичен прът. Това е проста и поучителна илюстрация как на базата на прости базисни модели (от типа на този на Хук) можем да опишем и изучим математически по-сложни процеси в изучаваните тела или, по-общо, обекти.

16.1. Надлъжни трептения на еластичен прът. Да разгледаме прав цилиндричен еластичен прът с напречно сечение с лице S . Оста на пръта означаваме с Ox , вж. фиг. 16.1. Предполагаме например, че единият край на пръта е закачен неподвижно, а другият край в резултат на приложена сила е получил дадено преместване. След това прътът е освободен от силата и оставен свободно да трепти. Впрочем, за по-голяма нагледност, вместо еластичен прът можем да си представим пружина, закачена неподвижно в единия си край. Пружината е разтегната надлъжно, прилагайки сила в другия ѝ край, след което е освободена от силата.



Фиг. 16.1



Фиг. 16.2

В резултат на всичко това в пръта се появяват вътрешни напрежения, които зависят вече и от двете независими променливи x и t : $\sigma = \sigma(x, t)$ с директриса, съвпадаща с оста Ox . Аналогично на натоварената нишка (§ 13.1), те се проявяват само ако разрежем мислено пръта — по двата края на разреза тогава ще се появят напреженията $\sigma(x, t)$ (на левия) и $-\sigma(x, t)$ (на десния край), вж. фиг. 16.1.

Както и в задачата за верижката, да изрежем мислено от пръта елемент с дължина dx на разстояние x от началото му, вж. фиг. 16.2.

Върху двете стени на този елемент ще действат силите $-\sigma(x, t)S$ и $\sigma(x + dx, t)S$. (Да напомним, че σ е напрежение, т. е. силата, действаща върху единица лице от напречното сечение, вж. (14.1).) Следователно главният вектор на силите, приложени върху разглежданото парче от пръта, е

$$\mathbf{F}(x, t) = [\sigma(x + dx, t) - \sigma(x, t)] S. \quad (16.1)$$

Тъй като парчето е безкрайно тънко, можем да го разглеждаме като материална точка с маса $\rho dV = \rho S dx$ и да приложим към него втория закон на Нютон (1.4):

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} = \mathbf{F}(x, t), \quad (16.2)$$

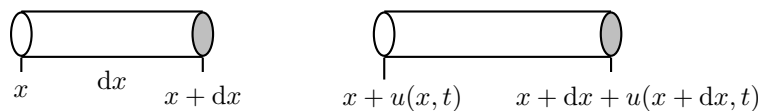
където $\mathbf{u}(x, t)$ е преместването на точката от пръта с координата x . Тук ρ е плътността на пръта, така че масата на изрязаното парче е $\rho dx S$. Прътът при това се предполага хомогенен, т. е. $\rho = \text{const}$. Обърнете внимание, че частната производна в лявата страна на уравнението (16.2) е следствие от факта, че пресмятаме ускорението във фиксирана точка от пръта, т. е. диференцираме (двукратно) функцията $\mathbf{u}(x, t)$ спрямо времето t при фиксирано x .

Заместваме в (16.2) израза (16.1) за $\mathbf{F}(x, t)$. Тъй като всички вектори в случая имат обща директриса (оста Ox), то след съкращаване на S и разделяне на двете страни на получения резултат с dx намираме

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x}. \quad (16.3)$$

Това е уравнението на движението на пръта при надлъжното му трептене. Обърнете внимание, че в статичния случай, когато зависимост от времето няма, (16.3) съвпада по същество с уравнението на равновесието на нишката (13.3). Частната производна $\partial \sigma(x, t) / \partial x$ в (16.3) се появява поради факта, че нарастването на функцията $\sigma(x, t)$ в (16.1) се изчислява при фиксирано време t .

Уравнението (16.3) е в сила при надлъжно трептене за произволен прът, независимо от неговите механични свойства. В случая на нишката (13.3) ние добавихме към подобното на (16.3) уравнение (13.3) условието за неразтегливост (13.12), за да получим диференциалните уравнения на равновесното положение на нишката. Сега ще добавим към (16.3) условието за еластичност (което до момента не е използвано изобщо), за да достигнем до диференциалното уравнение, описващо хоризонталното преместване $u(x, t)$ на точките от пръта.



Фиг. 16.3

За тази цел е необходимо първо да изразим деформацията $\varepsilon(x, t)$ в пръта чрез полето на преместването $u(x, t)$.

Разглеждаме отново елемента с дължина $\ell_0 = dx$, намиращ се на разстояние x от началото на пръта, вж. фиг. 16.3. Преместването на левия край на елемента е $u(x, t)$, а на десния — $u(x + dx, t)$. Началната дължина на елемента $\ell_0 = dx$ се изменя и става

$$\begin{aligned} \ell &= x + dx + u(x + dx, t) - (x + u(x, t)) \\ &= dx + u(x + dx, t) - u(x, t), \end{aligned}$$

а деформацията на разглеждания елемент е

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx}, \quad (16.4)$$

т. е.

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (16.5)$$

Производната е частна спрямо x , тъй като изменението на функцията $u(x, t)$ в (16.4) се изчислява при изменението на x за фиксирано време t .

Съгласно (16.5) и закона на Хук (14.5)

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

С това уравнението на движението на пръта (16.3) приема вида

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (16.6)$$

Тук сме въвели материалния параметър

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (16.7)$$

предполагайки за простота, че прътът е хомогенен и по отношение на еластичните си свойства, т. е. $E = \text{const}$. Параметърът a има очевидно размерност на скорост, $[a] = L/T$. Неговата интерпретация, свързана със скоростта на разпространение на надлъжните вълни в пръта, ще бъде дадена в следващия § 16.2.

Уравнението (16.6) е търсеното диференциално уравнение на надлъжните трептения на еластичен прът. Забележете, че това е *частно диференциално уравнение*, в смисъл че то включва частните производни на неизвестното поле на преместването $u(x, t)$.

Уравнение (16.6) е най-простият (едномерен) пример на т. нар. *вълново уравнение*. Уравнения от този вид описват например напречните трептения на струна или прът и, по-общо, широки класове от „трептеливи“ или вълнови процеси в деформируеми среди. Подробното им изследване е предмет на теорията на частните диференциални уравнения. Тук ще се ограничим само с намирането на едно знаменито общо решение на уравнението (16.6), което ще изясни както използваното наименование вълново, така и смисъла на параметъра a , който се появи в това уравнение, вж. (16.7).

16.2. Решение на Даламбер. Следвайки Даламбер, да въведем вместо x и t новите независими променливи

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (16.8)$$

Тогава $u(x, t) = \tilde{u}(\xi, \eta)$. По правилото за диференциране на сложна функция е лесно да проверим, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (16.9)$$

Уравнението (16.6) спрямо новите променливи ξ и η придобива вида

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

вж. (16.9), и общото му решение очевидно е

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

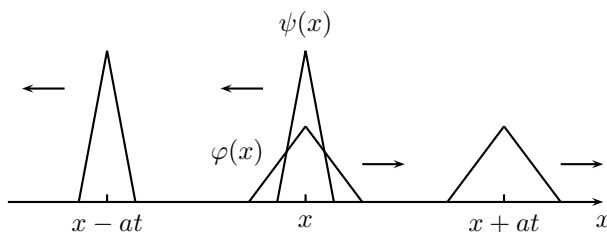
т. е.

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (16.10)$$

Тук φ и ψ са произволни (двукратно диференцируеми) функции на една скаларна променлива. Изразът (16.10) представлява *общото решение на Даламбер*³ на вълновото уравнение (16.6).

Решението на Даламбер има проста физическа интерпретация (вж. например [5, стр. 99]): функциите $\varphi(x - at)$ и $\psi(x + at)$ в (16.10) представляват *бягащи вълни*.

За да поясним този термин, да разгледаме например решението $u(x, t) = \varphi(x - at)$ на уравнението (16.6). Функцията $u(x, 0) = \varphi(x)$ се нарича *профил на вълната*. За всяко $t > 0$ решението $\varphi(x - at)$ в точката $x + at$ от пръта е равно на стойността на профила $\varphi(x)$ в точката x . Това означава, че за време t профилът се е придвижил на разстояние at , без да промени формата си, т. е. решението $\varphi(x - at)$ описва равномерно движение на профила $\varphi(x)$ вдясно със скорост a , вж. фиг. 16.4.



Фиг. 16.4. Интерпретация на решението на Даламбер (16.10)

Същата интерпретация е приложима и за решението $u(x, t) = \psi(x + at)$. В този случай профилът на вълната е функцията $u(x, 0) = \psi(x)$, който се движи вляво по оста x със същата скорост a , вж. фиг. 16.4.

Следователно решението на Даламбер (16.10) означава, че общото решение на хомогенното уравнение (16.6) е суперпозиция на две вълни с неизменни профили, движещи се в противоположни посоки по оста x с една и съща скорост a . Тази интерпретация обяснява използвания термин „вълново“ за уравнението (16.6), като едновременно разкрива и физическия смисъл на материалния параметър a , дефиниран в (16.7): това е скоростта на разпространението на споменатите две вълни.

³Впрочем директно се проверява, че $\varphi(x - at)$ е решение на вълновото уравнение. Наистина

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi'', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \varphi'', \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

и аналогично за $\psi(x + at)$.

§ 17. Модел на вискозна течност. Закон на Навие-Нютон

Еластичното тяло, въведено в § 14.1, е „твърдо“ в смисъл, че запазва формата си почти неизменна, стига действащите върху него сили да не са достатъчно големи. Но повече от очевидно е, че в непосредственото ни обкръжение съществува и друг клас деформируеми тела, които нямат определена характерна форма. Те се деформират (по-образно, „протичат“) при най малкото натоварване. Това са добре познатите ни течности и газове (или флуиди). Математическият им модел представлява отново частен случай на общото съотношение (14.4). Но за разлика от еластичното тяло напреженията тук са пропорционални не на деформацията ε , а на скоростта на деформацията $\dot{\varepsilon}$:

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (17.1)$$

в най-простия възможен случай, разбира се.

Тяло, подчиняващо се на закона на деформиране (17.1), се нарича вискозна или нютонова течност⁴. Самият закон (17.1) е известен като закон на Навие-Нютон, а коефициентът μ е вискозитетът на течността — единственият материален параметър на модела, родствен с модула на Юнг на еластичното тяло. Размерността на вискозитета е

$$[\mu] = \frac{[\sigma]}{[\dot{\varepsilon}]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1},$$

вж. (14.2).

Ще се опитаме сега да поясним и онагледим модела на вискозната течност и да „обосновем“ уравнението на състоянието (17.1).

Ще започнем с въведеното в (17.1) понятие скорост на деформация $\dot{\varepsilon}$. Нека дължината на цилиндричен образец от разглежданото тяло, по една или друга причина, се изменя във времето, т. е. $l = l(t)$. (За еластично тяло това ще се случи например, ако опънната сила е променлива.) Съгласно (14.3) деформацията на образца е също променлива:

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0}, \quad l_0 = l(0). \quad (17.2)$$

Следователно

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{l_0} \frac{dl(t)}{dt}. \quad (17.3)$$

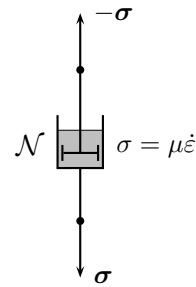
⁴При *ненютоновите* течности линейният закон (17.1) се заменя с нелинейната зависимост $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ между напрежението и скоростта на деформиране.

Формулата (17.3) позволява да дадем проста интерпретация на скоростта на деформация $\dot{\epsilon}$. Именно, да си представим, че единият край на образеца е неподвижен. Другият му край ще се движи тогава със скорост $v = d\ell(t)/dt$, което по силата на (17.3) дава

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{\ell_0} v, \quad (17.4)$$

т. е. скоростта на деформация на разглеждания образец е пропорционална на скоростта на движението v на подвижния му край.

Да въведем сега втория, след хуковата пружина, основен механичен елемент. Това е *вискозният елемент* или *буталото на Навие-Нютон*, което илюстрира и онагледява поведението на флуидите. То е показано на фиг. 17.1: в кръгово-цилиндричен съд, пълен с течност, се движи бутало под действието на двойката опънни сили \mathbf{T} и $-\mathbf{T}$. Лицето на буталото е S , така че съответните напрежения, отнесени към единица от това лице, са $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}/S$ и $-\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{T}/S$. Ще означаваме вискозния елемент с \mathcal{N} , в чест едновременно на Нютон и Навие.



Фиг. 17.1. „Буталце“ на Навие-Нютон

Нека $\ell = \ell(t)$ е височината на стълба течност под буталото в текущия момент от време t . В началния момент $\ell = \ell_0$, като в системата от мерни единици, с която работим, избираме $\ell_0 = 1$. Деформацията на този стълб се определя от (17.2), а скоростта му на деформация $\dot{\epsilon}$ е пропорционална на скоростта на движение v на горния му подвижен край, вж. (17.4). Тази скорост съвпада със скоростта на движението на буталото. (Разглежданата течност, да подчертаем, е „вискозна“, т. е. тя „прилепва“ към потопените в нея тела.) Но всяко тяло, включително и разглежданото бутало, потопено във флуид, изпитва съпротивление при движението си. По-точно, за поддържането на скоростта v на буталото във флуида е необходимо да се приложи силата T . При това е ясно, че v и T са пропорционални, в смисъл че колкото е по-голяма силата, толкова по-голяма е и скоростта, т. е. $T = T(v)$, където $T(v)$ е монотонно растяща функция на аргумента v . Естествено е да предположим в първо приближение, че $T(v)$ е линейна:

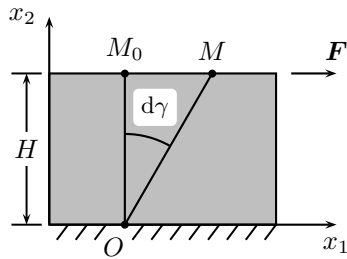
$$T = kv, \quad k > 0. \quad (17.5)$$

Но $T = \sigma S$, където S е лицето на буталото, а σ е действащото върху него напрежение. От друга страна, $v = \dot{\epsilon}$, вж. (17.4). Внасянето на последните два израза в (17.5) дава

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon}, \quad \mu = k/S, \quad (17.6)$$

което очевидно съвпада с уравнението на състоянието (17.1) на вискозната течност. (Напомниме, че $\ell_0 = 1$.)

Да подчертаем изрично, че горната „обосновка“ на модела (17.1) на флуид претендира единствено за нагледност. Стандартното, макар и също така евристично, въвеждане на този модел се базира на следния мислен експеримент на Нютон.



Фиг. 17.2

Разглеждаме пластина, която се движи със скорост v по повърхността на флуиден слой с височина H под действието на сила F , вж. фиг. 17.2, като избираме $H = 1$ в системата от мерни единици, с която работим. Предполагаме, че размерите на пластината са много по-големи от височината на слоя H .

Пластината „прилепва“ към флуида и увлича най-горния слой $x_2 = H$ със себе си. На дъното ($x_2 = 0$) скоростта на флуида е нулева, та-

ка че тази скорост се изменя от 0 до v линейно с увеличаване на x_2 .

При движението на пластината във флуидния слой се осъществява чисто срязване — деформацията, разгледана в § 14.2, вж. фиг. 14.3.

Да разгледаме частица от флуида, която в началния момент от време $t = 0$ е прилепнала в точката M_0 на пластината. След инфинитезимо време dt флуидната частица се е преместила, заедно с пластината, от M_0 в точката M , а първоначално правият ъгъл $\angle x_1 O M_0$ се е увеличил с $d\gamma = \angle M_0 O M$, вж. фиг. 17.2, т.е. появила се е ъглова (срязваща) деформация. Големината на тази деформация намираме от съотношението

$$\text{tg}(d\gamma) \approx d\gamma = v dt,$$

тъй като $|M_0 M| = v dt$. (Напомниме, че $H = 1$.) Следователно скоростта на изменението на срязващата деформация при движението на разглеждания флуиден слой съвпада със скоростта на движението на пластината

$$\dot{\gamma} = v, \quad (17.7)$$

т. е. със скоростта на най-горния флуиден слой.

Интуитивно е ясно, че скоростта на движението на пластината зависи от големината на приложената сила F , по-точно от големината на срязващото напрежение $\tau = F/S$, където S е лицето на пластината, вж. отново § 14.2. С други думи,

$$\tau = F(v), \quad \text{т. е.} \quad \tau = F(\dot{\gamma}),$$

предвид (17.7). В приближението на Навие-Нютон функцията F в последното съотношение се приема за линейна:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (17.8)$$

където μ е вече познатият ни вискозитет на флуида.

Любопитно е впрочем сравнението между (14.6) и (17.8). То показва, че вискозитетът е „флуидният“ аналог на модула на срязване на еластичното тяло. При последното обаче в закона на Хук участва срязващата деформация γ , докато при флуида тя е заместена от скоростта ѝ на изменение $\dot{\gamma}$.

Проведените разсъждения поясняват защо буталцето на Навие-Нютон (фиг. 17.1) е адекватен модел на поведението на вискозната течност. Причината е пропорционалността между напрежението и скоростта на деформацията в закона на деформирането му, вж. (17.6), аналогично на закона на Навие-Нютон (17.1) или (17.8). Дали тази деформация е опънна или срязваща, за нашите (иллюстративни преди всичко) цели е несъществено.

Да отбележим в заключение, че адекватните математически модели на еластичното тяло и на вискозния флуид се въвеждат в рамките на механиката на непрекъснатите среди. Това обаче изисква използването на апарата на тензорното смятане, който тук не се разглежда.

§ 18. Понятие за вискозо-еластични модели. Тела на Максвел, Фойхт и Келвин

18.1. Пълзене и релаксация. Експериментите, проведени през 19-ти век, показват, че редица тела притежават едновременно и еластични, и вискозни свойства. Такъв феномен е описан за пръв път от Вебер (1839), който решава да определи експериментално модула на Юнг на копринена нишка. За целта той използва най-простия и естествен начин

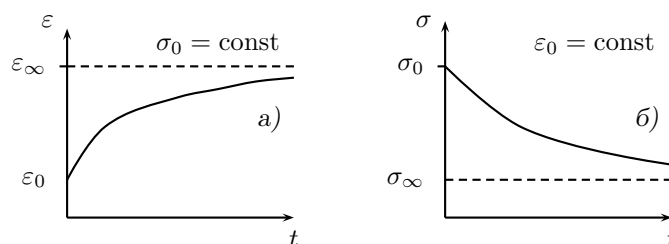
— прилага опънна сила F_0 и решава да измери съответната деформация на нишката. В момента на прилагането на силата се появява мигновена деформация ε_0 , което е естествено за всяко еластично тяло. Тази деформация обаче не остава постоянна. За изумление на Вебер и съвременниците му нишката започва да „тече“, в смисъл че при същата опънна сила F_0 деформацията започва да расте с времето, приближавайки се асимптотично към стойност $\varepsilon_\infty > \varepsilon_0$, вж. фиг. 18.1 а). Изменението на деформацията при неизменно натоварване, което днес обикновено се нарича *пълзене*,⁵ е характерно за редица тела, така че копринената нишка се оказва *вискозо-еластична среда* — тяло, проявяващо едновременно и еластични, и вискозни свойства. Типичната зависимост $\varepsilon = \varepsilon(t)$ за такава среда при постоянна опънна сила F_0 , т.е. при постоянно опънно напрежение $\sigma_0 = \text{const}$, е показана на фиг. 18.1 а). Това е т. нар. *крива на пълзене*.

Родствено на пълзенето е и явлението *релаксация*. При него ни интересува напрежението σ , възникващо в опънат прът, чиято деформация ε_0 се поддържа постоянна. Ако тялото е еластично, то $\sigma \equiv \sigma_0 = E\varepsilon_0$. Ефектът на вискозо-еластичност тук се проявява в намаляването на напрежението с течение на времето, като типичната зависимост $\sigma = \sigma(t)$ (*крива на релаксация*) е показана на фиг. 18.1 б).

Причината за вискозо-еластичното поведение става ясна едва през първата половина на 20-ти век. Това е специфичният строеж на някои тела, преди всичко на полимерите, които са съставени от макромолекули. Последните представляват много дълги вериги от молекули, които в равновесното си състояние (т.е. оставени сами на себе си) се стремят да се свият в кълбо. При прилагане на разтягащо напрежение първо се появява еластична (мигновена) деформация ε_0 . След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, което обяснява пълзенето. Тъй като макромолекулите са много, в един момент те започват да си „пречат“ взаимно и затова деформацията постепенно затихва, като се стреми към една постоянна стойност ε_∞ . Това е т. нар. *дълготрайна* (или *равновесна*) *деформация*, която се реализира в образаца при $t \rightarrow \infty$, т.е. при продължително време на пълзене. В резултат се наблюдава типичната крива на пълзене на полимерните материали, показана на фиг. 18.1 а).

Аналогично е и качественото обяснение на типичната крива на релаксация на полимерите. В този случай фиксираната деформация ε_0 , приложена в момент $t = 0$, се съпровожда от появата на еластично (миг-

⁵В българската литература се използва и терминът *крип* (от англ. „creep“ — пълзя).



Фиг. 18.1. Типични криви на пълзене (а) и на релаксация (б) за полимерни материали

новено) напрежение σ_0 съгласно закона на Хук. След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, при което напрежението намалява, като се стреми към една постоянна стойност σ_∞ . Това е т. нар. *дълготрайно* (или *равновесно*) напрежение, което се реализира в образаца при достатъчно голяма продължителност на релаксацията. В резултат се наблюдава типичната крива на релаксация на полимерните материали, показана на фиг. 18.1 б).

18.2. Конструирание на вискозо-еластични модели. Причината за наблюдаваните вискозо-еластични свойства на някои материали, например на споменатата копринена нишка⁶, през 19-ти век все още не е ясна. Поради това големите учени на епохата — Максвел, Фойхт, Келвин и др. — предлагат чисто механично описание на явлението, като строят *механистични* модели (верни на царувания тогава „механистичен“ дух). В основата са двата базисни модела: *тялото на Хук* (§ 14.1), изобразявано като пружинка, вж. фиг. 14.2, и *тялото на Навие* или на *Нютон* (§ 17) — бутало, което се движи в течност и моделира вискозното поведение, вж. фиг. 17.1. (По-късно впрочем се появява още един базисен елемент — т. нар. *тяло на Сен-Венан*, което моделира пластичното поведение. Тук то няма да се разглежда.) Читателят може да намери по-подробно изложение на вискозо-еластичните модели в книгите [9, 20, 37] и др.

За построяване на по-сложни модели, проявяващи *едновременно* и еластични и вискозни свойства, двата базисни елемента се свързват или последователно, или успоредно. Последователното свързване се означава с ‘—’, а успоредното с ‘||’. Най-простите възможни комбинации, т. нар. тела на Максвел и на Фойхт, ще изследваме подробно съответно в §§ 18.3 и 18.4. В тези най-прости модели, както и в произволно усложнените чрез добавяне на все нови и нови пружинки и буталца, основна-

⁶Копринената нишка е полимер от естествен произход.

та задача е да се конкретизира уравнението на състоянието на модела (14.4), т. е. връзката между напреженията и деформациите (и техните производни по времето, които, както ще видим, ще се появят по естествен начин).

Да отбележим, че уравненията на състоянието на деформируеми тела с по-сложно поведение (например вискозо-еластично) се наричат също и *реологични*. Тяхното изучаване в началото на 20-ти век се е концентрирало в *реологията* (от гръцкото „рео“ — тека, и „логос“ — знание) — най-общо казано, наука за деформацията и течението на телата. Първоначално реологията се е специализирала в изучаването на по-сложни модели, съставени от базисните.⁷ Днес подобни модели не представляват практически интерес и се използват, както и в настоящата книга, само за илюстрация на вискозо-еластичното (и по-общо, на нееластичното) поведение на телата. Реологията като общотеоретична дисциплина е престанала да има самостоятелен интерес и се е превърнала в част от механиката на непрекъснатите (деформируемите) среди. В последната се строят, вече систематично и с привличане на основните принципи на термодинамиката, законите на деформирането и течението на телата (вж. например двутомната монография на Седов [12]).

При извода на уравнението на състоянието за конкретни модели се използват две основни правила:

- При последователно свързване *напрежението е едно и също* във всички елементи, а деформациите им се сумират;
- При успоредно свързване *деформацията е една и съща* във всички елементи, а напреженията се сумират.

Ще илюстрираме тези два принципа върху двата най-прости модела — на Максвел и на Фойхт.

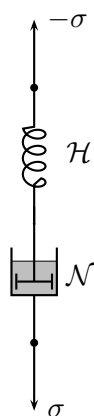
18.3. Модел на Максвел. *Тялото на Максвел* представлява елемент на Хук, т. е. пружинка, свързана последователно с буталце — вискозен елемент на Навие:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} - \mathcal{N},$$

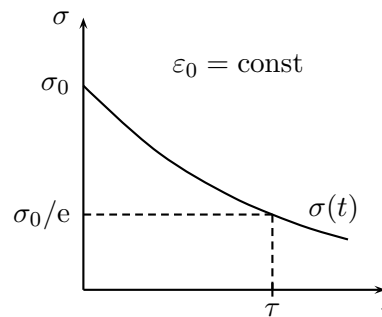
вж. фиг. 18.2. Нека σ_H, ε_H и σ_N, ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned} \sigma_H = \sigma_N = \sigma, \quad \varepsilon_H + \varepsilon_N = \varepsilon, \\ \sigma_H = E \varepsilon_H, \quad \sigma_N = \mu \dot{\varepsilon}_N, \end{aligned} \tag{18.1}$$

⁷ „Рекордът“ в това отношение е моделът на тесто за хляб, построен явно през 30-те години на миналия век и включващ повече от 30 пружинки и буталца.



18.2. Модел на Максвел



18.3. Релаксация в тялото на Максвел

където E е модулът на Юнг на пружинката, а μ — вискозитетът на течността в буталцето.

За да изключим ε_H и ε_N от (18.1), диференцираме формулата за пълната деформация на модела:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N = \frac{\dot{\sigma}_H}{E} + \frac{\sigma_H}{\mu}, \quad (18.2)$$

използвайки основните реологични съотношения за пружинката и буталцето. Но $\sigma_H = \sigma_N = \sigma$, вж. отново (18.1), и затова

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}, \quad (18.3)$$

което и представлява търсения реологичен закон за деформирането на тялото на Максвел.

Да разгледаме пълзенето и релаксацията в тялото на Максвел.

Прилагаме първо постоянно напрежение $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\sigma} = 0$ и от (18.3) имаме $\dot{\varepsilon} = \sigma/\mu$, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\sigma t}{\mu}.$$

Това показва, че кривата на пълзенето на модела е линейна по времето (при постоянно σ „тече“ само вискозният елемент, вж. фиг. 18.2). По този начин при тялото на Максвел *не се наблюдава* характерната за полимерните материали крива на пълзене, вж. фиг. 18.1 а), притежаваща хоризонтална асимптота.

Да разгледаме сега релаксацията в тялото на Максвел. Нека $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\varepsilon} = 0$ и от (18.3) следва

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0, \quad \sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0. \quad (18.4)$$

Решението на задачата на Коши (18.4) е

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\mu}{E}, \quad (18.5)$$

т.е. напрежението релаксира по експоненциален закон, като $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Константата τ в (18.5) има размерност време и се нарича *време на релаксация*. Интерпретацията ѝ е очевидна — тя характеризира скоростта на релаксация в тялото, в смисъл че за време τ напрежението намалява от началната си стойност σ_0 до $\sigma_0/e \approx \sigma_0/3$, т.е. приблизително три пъти, вж. фиг. 18.3.

18.4. Модел на Фойхт. Тялото на Фойхт представлява елемент на Хук — пружинка, свързана този път успоредно с буталце:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} \parallel \mathcal{N},$$

вж. фиг. 18.4. Нека отново σ_H, ε_H и σ_N, ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned} \varepsilon_H = \varepsilon_N = \varepsilon, \quad \sigma_H + \sigma_N = \sigma, \\ \sigma_H = E \varepsilon_H, \quad \sigma_N = \mu \dot{\varepsilon}_N. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Оттук веднага намираме

$$\sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon}, \quad (18.7)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Фойхт.

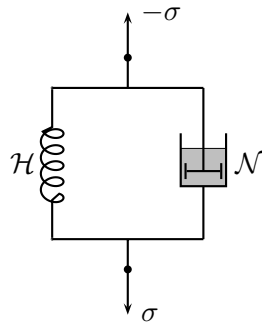
Да разгледаме, подобно на тялото на Максвел, пълзенето и релаксацията в модела на Фойхт.

При пълзене напрежението $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава, съгласно (18.7), функцията $\varepsilon(t)$ удовлетворява диференциалното уравнение

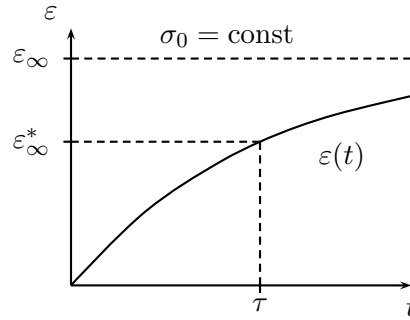
$$E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma_0, \quad (18.8)$$

чието решение е

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad \tau = \frac{\mu}{E}. \quad (18.9)$$



18.4. Модел на Фойхт



18.5. Пълзене в тялото на Фойхт

Уравнението (18.9) е решено при естественото начално условие

$$\varepsilon(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

(Да напомним, че деформацията при успоредното свързване е една и съща и в двата елемента; но деформацията във вискозния елемент при $t = 0$ е нулева. Този елемент не може да се деформира мигновено за разлика от еластичния; деформацията в него винаги се развива постепенно, започвайки от нулата.) Деформацията при пълзенето тук расте по експоненциален закон, като клони асимптотично към дълготрайната си стойност

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (18.10)$$

Забележете, че ε_{∞} е деформацията на еластичния елемент под действието на напрежението σ_0 , ако буталцето изобщо отсъства. Това е естествено предвид (18.9): с течение на времето скоростта на деформацията намалява, $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$, напрежението във вискозния елемент $\sigma_N = \mu \dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ и цялото напрежение се „поема“ от пружинката при $t \rightarrow \infty$, вж. фиг. 18.4.

Параметърът τ , дефиниран в (18.9), е характерното време за разглежданото тяло на Фойхт. То се нарича време на *ретардация* (закъснение). Интерпретацията му е следната. Както се вижда от (18.9), при прилагане на напрежението σ_0 деформацията се стреми асимптотично към дълготрайната си (равновесна) стойност $\varepsilon_{\infty} = \sigma_0/E$. В момента $t = \tau$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_{\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \varepsilon_{\infty} \frac{e-1}{e} \approx \frac{2}{3} \varepsilon_{\infty},$$

т. е. деформацията е приблизително $2/3$ от пълната деформация ε_{∞} , вж. фиг. 18.5. Следователно τ характеризира „закъснението“, с което се нат-

рупва пълната деформация вследствие на вискозо-еластичността на тялото.

18.5. Модел на Келвин (стандартно линейно тяло). Както видяхме, моделът на Максвел описва донякъде правдоподобно само релаксацията, а този на Фойхт — само пълзенето на материали от полимерен тип. За едно по-адекватно описание на поведението на такива материали и, в частност, за получаване на по-реалистични криви на пълзене и релаксация (от вида на показаните на фиг. 18.1) двата модела следва да се комбинират и усложнят.

Най-простата такава комбинация е т. нар. *тяло на Келвин* (известно още като *стандартно линейно тяло* или *тяло на Зинер*). Схематично, то се представя като

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{V} = \mathcal{H}_1 - (\mathcal{H}_2 \parallel \mathcal{N}), \quad (18.11)$$

както е изобразено на фиг. 18.6. (Пружинката \mathcal{H}_1 е свързана последователно с тялото на Фойхт \mathcal{V} .)

Да означим с ε_1 , σ_1 и ε_V , σ_V деформациите и напреженията съответно в пружинката \mathcal{H}_1 и тялото на Фойхт \mathcal{V} . Тогава

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_V, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_V. \quad (18.12)$$

Освен това

$$\sigma_V = E_2 \varepsilon_V + \mu \dot{\varepsilon}_V,$$

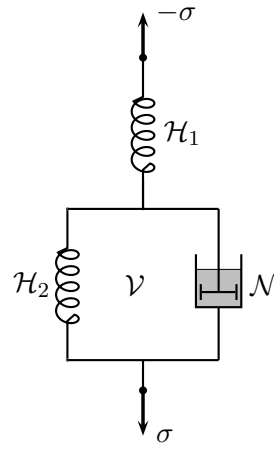
вж. (18.7). От (18.12) намираме $\varepsilon_V = \varepsilon - \varepsilon_1$, което замества в последното съотношение, отчитайки, че $\sigma = \sigma_1 = \sigma_V$:

$$\sigma = E_2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \mu \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right),$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \lambda \sigma &= E (\dot{\varepsilon} + \eta \varepsilon), \\ E = E_1, \quad \lambda &= \frac{E_1 + E_2}{\mu}, \quad \eta = \frac{E_2}{\mu}, \end{aligned} \quad (18.13)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Келвин.



Фиг. 18.6. Модел на Келвин

18.6. Качествено изследване на тялото на Келвин. В заключение на този параграф ще изследваме качествено кривите на пълзене и релаксация, съответстващи на модела на Келвин (18.13).

Да приложим постоянно напрежение σ_0 в момент $t = 0$ към това тяло. Тъй като напрежението се изменя скокообразно, то при $t = 0$ скоростите на изменение и на напрежението, $\dot{\sigma}$, и на деформацията, $\dot{\epsilon}$, са много големи. Тогава σ и ϵ могат да се пренебрегнат съответно спрямо $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$, което съгласно (18.13) води до

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad \text{или} \quad \sigma = E\epsilon.$$

Това означава, че при много бързи процеси тялото на Келвин се държи като еластично с модул на Юнг, съвпадащ с този на пружинката \mathcal{H}_1 , т. е. $E = E_1$. Модулът E се нарича *мигновен* или *моментен модул на Юнг*. (При много бързо натоварване реагира само пружинката \mathcal{H}_1 , а тялото на Фойхт \mathcal{V} , предвид наличието на вискозен елемент в него, не може да реагира мигновено.)

В другия краен случай на много бавно деформиране $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ са съответно пренебрежимо малки спрямо σ и ϵ . Оттук

$$\sigma = E_\infty \epsilon, \quad E_\infty = E \frac{\eta}{\lambda},$$

вж. (18.13). Това означава, че и в този случай тялото на Келвин се държи като еластично, но с модул на еластичност E_∞ , наречен *дълготраен* или *равновесен модул на Юнг*.

От дефиницията на E , η и λ , вж. (18.13), следва впрочем, че

$$E_\infty < E. \quad (18.14)$$

При пълзене, след прилагане на напрежението σ_0 в момента $t = 0$, тялото се държи като еластично с модул на Юнг, равен на моментния модул E . Деформацията му тогава е $\epsilon_0 = \sigma_0/E$. С течение на времето скоростта на деформация намалява (в „играта“ се включва и тялото на Фойхт с вискозния елемент в него), стремейки се към нула. При $t \rightarrow \infty$ тялото отново се превръща в еластично, но с модул на Юнг E_∞ . Съответната деформация е

$$\epsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_\infty} > \epsilon_0$$

предвид (18.14). Следователно кривата на пълзене на тялото на Келвин има типичния за полимерните материали вид, показан на фиг. 18.1 а).

Аналогични разсъждения, свързани с прилагането на постоянна деформация $\varepsilon_0 = \text{const}$ в момент $t = 0$, показват, че съответните криви на релаксация намаляват монотонно от стойността $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ при $t = 0$ до $\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon_0 < \sigma_0$ при $t \rightarrow \infty$. По този начин се вижда, че кривата на релаксация в случая има типичния вид за полимерите, показан на фиг. 18.1б).

Конкретните функционални изрази на самите криви на пълзене и релаксация зависят от специфичния модел. За тялото на Келвин тези криви се изразяват чрез експоненциални функции. Подробното им изследване ще проведем в следващия параграф. На базата на това изследване ще се опитаме да отговорим, в частност, и на въпроса какви са реологичните уравнения на моделите, които включват все по-голям брой пружинки и буталца, в граничния случай, когато този брой клони към безкрайност.

§ 19. „Наследственост“ на телата. Принцип на суперпозицията на Болцман

19.1. Интегрална формулировка на закона на деформирането на стандартно линейно тяло. Да разгледаме по-подробно закона на деформирането на стандартното линейно тяло

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon), \quad (19.1)$$

вж. (18.13). Целта ни тук е да преобразуваме (19.1) в еквивалентен вид, в който обаче производните са заменени с подходящи интегрални оператори. Това ще позволи да илюстрираме и да изясним, върху примера на стандартното линейно тяло, най-характерната особеност на вискозоеластичните модели и тела. Това е наличието на *наследственост* в тях: предисторията на напрежението (съответно на деформацията) определя деформацията (съответно напрежението) в даден момент от времето.

Да предположим, че ни е известна „историята“ на деформацията на образеца, т. е. функцията $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като естествено предполагаме, че $\varepsilon(-\infty) = 0$. От (19.1) следва уравнението

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = f(t), \quad f(t) = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon), \quad (19.2)$$

за „историята“ на напрежението $\sigma = \sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$; дясната страна $f(t)$ тук е известна функция, щом $\varepsilon(t)$ е зададено.

Уравнението (19.2) е линейно нехомогенно обикновено диференциално уравнение. Общото решение на хомогенното уравнение е $C e^{-\lambda t}$, $C = \text{const}$. Търсим частното решение на (19.2) по метода на неопределените множители на Лагранж, т. е. във вида

$$\sigma(t) = C(t) e^{-\lambda t}, \quad (19.3)$$

с неизвестна функция $C(t)$. Заместването на (19.3) в (19.2) води, след прости пресмятания, до следното уравнение за $C(t)$:

$$\dot{C} e^{-\lambda t} = f(t), \quad C(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau + C_1.$$

Следователно общото решение на нехомогенното уравнение (19.2) е

$$\sigma(t) = C_1 e^{-\lambda t} + \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (19.4)$$

Тъй като $\sigma(t)$ трябва да остава ограничено за всички t , в частност и при $t \rightarrow -\infty$, то $C_1 = 0$. Заместваме сега израза за $f(t)$, вж. (19.2), в дясната страна на (19.4) и интегрираме първото събираемо по части:

$$\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) \Big|_{-\infty}^t - \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Оттук

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - (\lambda - \eta) \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right) \quad (19.5)$$

(използвахме, че по предположение $\varepsilon(-\infty) = 0$). В символичен вид (19.5) се записва като

$$\sigma = E (\mathbf{1} - (\lambda - \eta) \mathcal{E}_\lambda) \varepsilon. \quad (19.6)$$

Тук с $\mathbf{1}$ е означен единичният (тъждествен) оператор в пространството от функции $\varepsilon(t)$, т. е. операторът, който съпоставя на всяка функция $\varepsilon(t)$, дефинирана върху реалната ос \mathcal{R} , същата функция $\varepsilon(t)$. На свой ред, \mathcal{E}_λ е интегрален оператор в споменатото пространство, който преобразува функцията $\varepsilon(t)$ по следния закон:

$$\mathcal{E}_\lambda [\varepsilon] (t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R}. \quad (19.7)$$

Да отбележим, че \mathcal{E}_λ е частен случай на вече познатия ни *интегрален оператор на Волтера*

$$\mathcal{K} [\varepsilon] (t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R}, \quad (19.8)$$

вж. (8.24), при специален (експоненциален) избор на ядрото $K(t) = e^{-\lambda t}$.

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато е зададена „историята“ на напрежението, т. е. функцията $\sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като $\sigma(-\infty) = 0$. Тогава (19.2) е линейно нехомогенно обикновено диференциално уравнение спрямо функцията $\varepsilon(t)$. Вместо (19.5) сега намираме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) - (\eta - \lambda) \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (19.9)$$

или, използвайки означението (19.7),

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta) \sigma. \quad (19.10)$$

Забелязваме попятно, че операторите, участващи в (19.6) и (19.10), са взаимно-обратни:

$$\left[E (\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda) \right]^{-1} = \frac{1}{E} \left[\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta \right],$$

т. е.

$$\left[\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda \right] \left[\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta \right] = \mathbf{1}.$$

Оттук следва простата и любопитна формула за умножение на два волтерови оператора с експоненциални ядра:

$$\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\eta = \frac{\mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}_\eta}{\eta - \lambda}. \quad (19.11)$$

Да поясним, че под произведение на два оператора разбираме тяхната суперпозиция:

$$(\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\eta) [\sigma](t) = \mathcal{E}_\lambda [\varepsilon](t), \quad \varepsilon(t) = \mathcal{E}_\eta [\sigma](t).$$

19.2. „Наследственост“ на телата. Законът за деформиране на стандартното линейно тяло в интегралния му вид (19.5) (или (19.9)) е еквивалентен на диференциалния запис (19.1). Интегралният вид е обаче много по-удобен за изясняване на спецификата на механичното поведение на разглежданите материали.

Да представим (19.5) във вида

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma^e(t) + \sigma^h(t), \\ \sigma^e(t) &= E \varepsilon(t), \quad \sigma^h(t) = -E(\lambda - \eta) \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Тук очевидно $\sigma^e(t)$ е напрежението, което би се появило в тялото в момент t в резултат на деформацията $\varepsilon(t)$, ако то беше идеално еластично. Вторият член, $\sigma^h(t)$, е резултат на вискозо-еластичните ефекти. Интегралната форма на този член показва, че съответното напрежение $\sigma^h(t)$ зависи не само от деформацията в същия момент от време, но и от цялата ѝ „предистория“ $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. В това именно се състои и ефектът на *наследственост* на разглежданите тела: деформацията $\varepsilon(\tau)$, приложена в интервала $(\tau, \tau + d\tau)$, влияе върху стойността на напрежението във *всички* бъдещи моменти от време. Това влияние, съгласно (19.12), поражда в момента t напрежение

$$-E(\lambda - \eta)e^{-\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau) d\tau, \quad (19.13)$$

което очевидно е пропорционално на големината на деформацията $\varepsilon(\tau)$ и на дължината $d\tau$ на интервала, в който тя действа. Коефициентът на пропорционалност (т. нар. *функция на влияние*) зависи от $t - \tau$ (интервала от време между момента τ на приложената деформация и момента t , в който отчитаме влиянието ѝ). Ясно е, че това влияние трябва да затихва при $t - \tau \rightarrow \infty$. За стандартното линейно тяло, както се вижда от (19.13), затихването е експоненциално.

Да обърнем внимание, че с аналогичен ефект на наследственост вече се сблъскахме при един от моделите на популационната динамика (§ 8.7). Там се оказа, че коефициентът на прираст на хищниците в даден момент от време се обуславя от количеството храна, консумирана в предишните моменти от време. В резултат на това в уравненията на модела се появи по естествен начин същият интегрален оператор на Волтера, вж. (8.23).

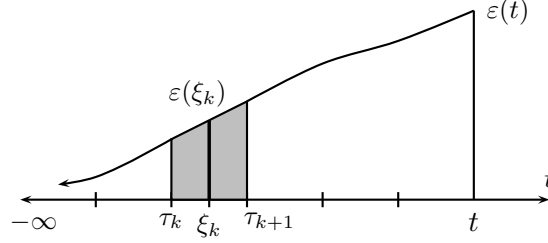
19.3. Принцип на суперпозицията на Болцман. Обобщението на казаното в § 19.2 е очевидно. Нека $\sigma(t)$ е напрежението в момент t , възникнало в тялото в резултат на зададена „предистория“ на деформацията $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. Тогава отново

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^h(t), \quad (19.14)$$

където $\sigma^e(t) = E\varepsilon(t)$ е чисто еластичното напрежение вследствие на деформацията в същия момент от време t .

Следвайки Болцман, да разбием $(-\infty, t)$ на части с помощта на точките τ_k :

$$-\infty < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k < \tau_{k+1} < \dots < t,$$



Фиг. 19.1. Принцип на суперпозицията на Болцман

и да представим предисторията $\varepsilon(\tau)$ като суперпозиция на отделни части (импулси), действащи във всеки един от интервалите (τ_k, τ_{k+1}) :

$$\varepsilon(\tau) = \sum_k \varepsilon^{(k)}(\tau), \quad \varepsilon^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \varepsilon(\tau), & \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}), \\ 0, & \tau \notin (\tau_k, \tau_{k+1}). \end{cases}$$

Един от тези импулси е заштрихован на фиг. 19.1. Функцията $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ ще предизвика в бъдещия момент от време t напрежение $\Delta\sigma^{(k)}$, пропорционално на дължината $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ на интервала на действието си и на големината $\varepsilon(\xi_k)$ на деформацията в средната точка ξ_k на интервала (τ_k, τ_{k+1}) :

$$\Delta\sigma^{(k)} \approx EK(t - \xi_k) \varepsilon(\xi_k) \Delta\tau_k, \quad (19.15)$$

с точност до малки от по-висок ред спрямо $\Delta\tau_k$.

Напрежението в момент t , породено от всички предишни импулси $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ на деформацията, ще се представи като сума от съответните напрежения (19.15):

$$\sigma^h(t) \approx E \sum_k K(t - \xi_k) \varepsilon(\xi_k) \Delta\tau_k. \quad (19.16)$$

В това именно се състои принципът на *суперпозицията на Болцман*. Подчертаваме специално, че сумирането на ефектите от различните импулси в (19.16) е съществено и нетривиално предположение, свързано с характера на деформирането на тялото, а не е универсално свойство. По ред причини, обусловени от спецификата на деформацията на конкретните материали, принципът на Болцман е в сила за полимери, ако напреженията не са много големи (не превишават, да речем, половината от стойността на разрушаващите). За метали принципът на суперпозицията се оказва неприложим.

Дясната страна на (19.16) очевидно е риманова сума на един определен интеграл — при $\Delta\tau_k \rightarrow 0$ тя се стреми към

$$E \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau .$$

Следователно законът за деформирането на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозиция на Болцман, има вида

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right) . \quad (19.17)$$

Такова тяло се нарича *линейно наследствено*.

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато представим деформацията в момент t във вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^h(t) ,$$

срв. (19.14). Тук $\varepsilon^e(t) = \sigma(t)/E$ е чисто еластичната деформация, причинена от напрежението $\sigma(t)$, действащо в същия момент от време t ; $\varepsilon^h(t)$ е „наследство“ от предисторията $\sigma(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$, на напрежението. Като приложим отново принципа на суперпозицията на Болцман, стигаме до аналогично на (19.17) интегрално представяне на деформацията:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right) , \quad (19.18)$$

но с друго ядро $\Gamma(t)$.

Забелязваме, че интегралните оператори в (19.17) и (19.18) са волтерови. Като ползваме означението за последните, въведено в (19.8), записваме закона за деформиране на наследственото тяло, подчиняващо се на принципа на Болцман, във вида

$$\sigma = E (\mathbf{1} + \mathcal{K}) \varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} (\mathbf{1} + \mathcal{G}) \sigma . \quad (19.19)$$

В частния случай на експоненциални ядра

$$K(t) = -(\lambda - \eta)e^{-\lambda t}, \quad \Gamma(t) = -(\eta - \lambda)e^{-\eta t} \quad (19.20)$$

и съотношенията (19.19) възпроизвеждат вече познатите закони за деформирането (19.5) и (19.9) на стандартното линейно тяло.

19.4. Криви на релаксация и пълзене. Да предположим, че

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (19.21)$$

Тук $H(t)$ е т. нар. *функция на Хевисайд* или *стъпаловидната функция*. Заместването на (19.21) в (19.17) ни дава закона за релаксация на напрежението в разглежданото тяло:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0. \quad (19.22)$$

Формулата (19.22) показва, че ако е известна функцията на релаксация, например експериментално, $K(t)$ се намира веднага чрез диференциране. Поради това функцията $K(t)$ в закона (19.17) се нарича *ядро на релаксация* на модела.

Да предположим, аналогично на (19.21), че

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t).$$

От (19.18) тогава определяме кривата на пълзене на модела:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0; \quad (19.23)$$

поради това $\Gamma(t)$ се нарича *ядро на пълзене*.

С помощта на (19.20), от (19.22) и (19.23) намираме, след елементарно интегриране, функциите на релаксация и пълзене за стандартното линейно тяло:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[1 - \frac{\lambda - \eta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right], \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0, \quad t \geq 0, \quad (19.24)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\lambda - \eta}{\lambda} (1 - e^{-\eta t}) \right], \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \geq 0. \quad (19.25)$$

Тъй като $\lambda > \eta$, вж. (18.13), напрежението $\sigma(t)$ съгласно (19.24) релаксира от моментната си стойност σ_0 (при $t = 0$) до „дълготрайната“ си стойност

$$\sigma_\infty = \sigma_0 \frac{\eta}{\lambda} = E_\infty \varepsilon_0$$

(при $t = \infty$) по експоненциален закон, вж. (19.24).

При пълзене деформацията се изменя от моментната си стойност $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ (при $t = 0$) до „дълготрайната“

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_0 \frac{\lambda}{\eta} = \frac{\sigma_0}{E_\infty}$$

(при $t = \infty$) също по експоненциален закон.

След всичко казано дотук вече сме в състояние да отговорим на въпроса, поставен в края на § 18.6: какво е реологичното поведение на моделите, построени с помощта на N' пружинки и N'' буталца, когато $N', N'' \rightarrow \infty$? Ако N', N'' са крайни, кривите на пълзене представляват линейни комбинации на краен брой експоненциални функции с различни константи λ_k и η_k (т. е. с различни времена на релаксация и ретардация). От (19.22) и (19.23) тогава следва, че и ядрата $K(t)$ и $\Gamma(t)$ са линейни комбинации на същите експоненциални функции:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k e^{-\lambda_k t}, \quad \Gamma(t) = \sum_{k=1}^{N_2} b_k e^{-\eta_k t},$$

при това N_1 и N_2 се определят чрез N' и N'' (точната зависимост няма значение предвид качествения характер на разсъжденията). Когато $N', N'' \rightarrow \infty$, функциите $K(t)$ и $\Gamma(t)$ се превръщат в произволни, а моделът от пружинки и буталца на свой ред се превръща в наследствения интегрален модел (19.17) (или, еквивалентно, (19.18)) за деформиране на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозицията на Болцман.